

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag: Tirsdag 8. oktober 2024
Tid for eksamen: 15:00–17:00
Oppgavesettet er på 10 sider.
Vedlegg: Formelsamling
Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Det komplekse tallet z har polarkoordinater $r = \sqrt{2}$ og $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Da er z^2 lik:

A) $1 - i\sqrt{3}$

B) $-2i$

C) $1 + i\sqrt{3}$

D) $4i$

E) $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$

Riktig svar: B).

Kort begrunnelse: $z^2 = r^2 e^{i(2\theta)} = 2e^{i(\frac{3\pi}{2})} = -2i$.

Oppgave 2

Hvilket komplekst tall z oppfyller $z^3 = -1 + i$?

A) $2^{1/6} e^{i(\frac{5\pi}{12})}$

B) $2^{1/6} e^{i(\frac{11\pi}{12})}$

C) $2^{1/3} e^{i(\frac{5\pi}{12})}$

D) $2^{1/2} e^{i(\frac{7\pi}{4})}$

E) $2^{1/2} e^{i(\frac{5\pi}{4})}$

(Fortsettes på side 2.)

Riktig svar: B).

Kort begrunnelse: På polarform har vi $-1 + i = \sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4})}$, så 3.-røttene er lik $r^{1/3}e^{i\theta/3}$, $r^{1/3}e^{i(\theta+2\pi)/3}$ og $r^{1/3}e^{i(\theta+4\pi)/3}$. Vi finner at $r^{1/3} = 2^{1/6}$ og

$$\frac{\theta + 2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12},$$

som er modulus og argument i alternativ B).

Oppgave 3

Hvilken andregradsligning har $-2 + i$ og $1 + i$ som løsninger?

- A) $z^2 + z(3 + 2i) + 1 - 3i$.
- B) $z^2 - z(3 + 2i) + 1 - 3i$
- C) $z^2 + z(-2 + i) + 1 + i$.
- D) $z^2 + z(1 - 2i) - (3 + i)$.
- E) $z^2 + z(1 - 2i) + (3 - i)$.

Riktig svar: D).

Kort begrunnelse: Vi regner ut produktet $(z - (-2 + i))(z - (1 + i))$.

Oppgave 4

Det komplekse tallet $(\sqrt{3} - i)^{10}$ er lik:

- A) $2^9(1 - i\sqrt{3})$.
- B) $2^4(1 + i\sqrt{3})$.
- C) $2(-1 + i\sqrt{3})$.
- D) $2^{10}(1 + i\sqrt{3})$.
- E) $2^9(1 + i\sqrt{3})$.

Riktig svar: E).

Kort begrunnelse: I polar form er $(\sqrt{3} - i)^{10}$ lik $2e^{i(\frac{11\pi}{6})}$. Ved de Moivres formel har vi $z^{10} = 2^{10}e^{i(\frac{110\pi}{6})}$. Vi forkorter argumentet slik at vi tar ut multiplum av 2π . Først forkortes 2, deretter regner vi ut at

$$\frac{55\pi}{3} = \frac{(18 \cdot 3 + 1)\pi}{3} = 18\pi + \frac{\pi}{3}.$$

Endelig bruker vi at $\cos(\pi/3) = 1/2$ og $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 5

Området A i planet av komplekse tall er gitt ved $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2i| < 2\}$. Da består A av alle $z = x + iy$ i planet av komplekse tall som:

- A) Ligger utenfor en sirkel med sentrum $2i$ og radius 2.
- B) Har realdel $x < 2$.
- C) Ligger under x -aksen.
- D) Ligger inne i en sirkel med sentrum $2i$ og radius 2.
- E) Ligger inne i en sirkel med sentrum 0 og radius 2.

Riktig svar: D).

Kort begrunnelse: Om vi har ulikheten $|x + yi - 2i| < 2$, da er $|x + yi - 2i|^2 < 2^2$, eller $x^2 + (y - 2)^2 < 2^2$. Dette er området i planet av komplekse tall som består av punkter innenfor en sirkel med sentrum i $(0, 2)$, som er punktet $2i$, og radius 2.

Oppgave 6

Grenseverdien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n + 6} - \sqrt{n^2 - 3n + 3})$$

er lik:

- A) ∞
- B) 0
- C) 3
- D) 6
- E) 2

Riktig svar: C)

Kort begrunnelse: Vi ganger med det konjugerte uttrykket og har:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n + 6} - \sqrt{n^2 - 3n + 3}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 3n + 6} - \sqrt{n^2 - 3n + 3})(\sqrt{n^2 + 3n + 6} + \sqrt{n^2 - 3n + 3})}{(\sqrt{n^2 + 3n + 6} + \sqrt{n^2 - 3n + 3})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 3n + 6) - (n^2 - 3n + 3)}{(\sqrt{n^2 + 3n + 6} + \sqrt{n^2 - 3n + 3})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n + 3}{n(\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{6}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2}})} \\ &= \frac{6}{2} = 3. \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 7

En følge er gitt rekursivt ved $a_1 = 1$ og $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 12}{8}$. Da er $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ lik:

- A) $\frac{3}{2}$
- B) 1
- C) 6
- D) 2
- E) ∞

Riktig svar: D).

Kort begrunnelse: Vi har $a_2 = \frac{13}{8} > a_1$. Ved induksjon kan det vises at $a_{n+1} \geq a_n$ for alle naturlige tall n , så følgen er voksende. Vi har at $a_1 < 2, a_2 < 2$. Ved induksjon kan det vises at $a_{n+1} < 2$: dersom vi antar $a_k < 2$ får vi at $a_{k+1} < \frac{2^2 + 12}{8} = \frac{16}{8} = 2$. Da følgen er voksende og oppad begrenset, er den konvergent. Lar vi $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, får vi at $a = \frac{a^2 + 12}{8}$. Løser vi $a^2 - 8a + 12 = 0$, får vi mulighetene 2 og 6, men det siste passer ikke med at følgen er begrenset av 2.

Oppgave 8

En funksjon er gitt ved $f : [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$. Det eneste som opplyses er at funksjonen er kontinuerlig og oppfyller at $f(-3) = 2$ og $f(2) = 0$. Da vet du også at:

- A) Det finnes et indre punkt $c \in (-3, 2)$ slik at $f(c) = 1$.
- B) Det finnes et indre punkt $c \in (-3, 2)$ der $f'(c) = 1$.
- C) Funksjonen f har et maksimum i -3 .
- D) Funksjonen er avtagende på $(-3, 2)$.
- E) Funksjonen er deriverbar i hele $(-3, 2)$.

Riktig svar: A).

Kort begrunnelse: Dette er en konsekvens av skjæringssetningen anvendt på $g(x) = f(x) - 1$, siden g er kontinuerlig, $g(-3) = 2 - 1 = 1 > 0$ og $g(2) = 0 - 1 = -1 < 0$.

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 9

La $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = ax + b$, med a, b reelle tall. Det eneste som opplyses er at $a > 0$. Det er gitt en $\epsilon > 0$ som er vilkårlig liten. Hvilken $\delta > 0$ er slik at $|x - 1| < \delta$ medfører $|f(x) - f(1)| < \epsilon$?

A) $\delta = \epsilon$

B) $\delta = \epsilon \frac{b}{a}$

C) $\delta = \frac{\epsilon}{a}$

D) $\delta = \frac{1}{2}$

E) $\delta = \frac{\epsilon}{b}$

Riktig svar: C).

Kort begrunnelse: Vi setter $h = x - 1$ og får

$$\begin{aligned} |f(x) - f(1)| &= |a(h + 1) + b - (a \cdot 1 + b)| \\ &= |ah| \\ &= a|h|. \end{aligned}$$

Dette blir mindre enn ϵ om vi velger $\delta = \epsilon/a$.

Oppgave 10

Grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 6x^2 + 1}{3 - 10x + 2x^3}$$

er lik:

A) $\frac{4}{3}$

B) $\frac{1}{3}$

C) -2

D) 2

E) Umulig å avgjøre

Riktig svar: D).

Kort begrunnelse: Vi deler på x^3 i både teller og nevner og ser at grensen blir $\frac{4}{2} = 2$.

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 11

Grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 3} 2(x-3) \tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)$$

er lik:

A) ∞

B) $-\frac{3}{\pi}$

C) $-\frac{6}{\pi}$

D) $-\frac{12}{\pi}$

E) 0

Riktig svar: D).

Begrunnelse: Vi kan bruke l'Hopitals regel "0/0":

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} 2(x-3) \tan\left(\frac{\pi}{6}x\right) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3)}{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3)}{\cot\left(\frac{\pi}{6}x\right)} \\ &\stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3)}{\frac{1}{-\frac{\pi}{6} \sin^2\left(\frac{\pi}{6}x\right)}} \\ &= \left(-\frac{12}{\pi}\right) \lim_{x \rightarrow 3} \sin^2\left(\frac{\pi}{6}x\right) = -\frac{12}{\pi} \cdot 1 = -\frac{12}{\pi}. \end{aligned}$$

Alternativt kan vi omforme uttrykket til

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3) \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)}.$$

Siden $\lim_{x \rightarrow 3} \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0$ og $\lim_{x \rightarrow 3} \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) = 1$, kan vi bruke l'Hopitals regel "0/0":

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3) \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)} &\stackrel{l'H}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 2(x-3) \cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) \cdot \frac{\pi}{6}}{-\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)}, \\ &= -\frac{12}{\pi}. \end{aligned}$$

Oppgave 12

Grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x}\right)^x$$

er lik:

(Fortsettes på side 7.)

- A) 1
- B) $\frac{1}{2}$
- C) e^2
- D) $\sqrt{e}$
- E) 2

Riktig svar: D).

Kort begrunnelse: Vi flytter grensen i eksponenten. Vi har at

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln(\frac{2x+1}{2x})} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(\frac{2x+1}{2x})}.$$

Vi omformer, bruker l'Hopitals regel (0/0) og får

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\frac{2x+1}{2x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2x+1}{2x}\right)' \cdot \frac{2x}{2x+1}}{-x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^3}{2x+1} \cdot \frac{-2}{4x^2} = \frac{1}{2}.$$

I alt er grensen lik $e^{1/2} = \sqrt{e}$.

Oppgave 13

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

Hva er $f'(0)$?

- A) 2
- B) 1
- C) 0
- D) $-\frac{1}{2}$
- E) Ikke definert

Riktig svar: C).

Kort begrunnelse: Vi bruker definisjonen av den deriverte og l'Hopitals regel to ganger, som følger:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} \\ &\stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x} \\ &\stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2} = 0. \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 8.)

Oppgave 14

Hvor er funksjonen $f(x) = \frac{3}{5}x^{5/2} + x^{1/2}$ konkav?

- A) På intervallet $(0, \frac{1}{3}]$
- B) På intervallet $[\frac{1}{3}, \infty)$
- C) På intervallet $(0, \frac{2}{3}]$
- D) På intervallet $[\frac{2}{3}, \infty)$
- E) Umulig å avgjøre

Riktig svar: A).

Kort begrunnelse: Vi beregner at $f'(x) = \frac{3}{2}x^{3/2} + \frac{1}{2}x^{-1/2}$ og at $f''(x) = \frac{1}{4}x^{-3/2}(3x - 1)(3x + 1)$. Denne er ≤ 0 på intervallet $(0, \frac{1}{3}]$ i funksjonens definisjonsområde.

Oppgave 15

En 3 meter lang stige står lent mot en husvegg. La $x(t)$ være avstanden fra vegg til nedre del av stigen, og la $y(t)$ være høyden der øvre del av stigen møter vegg. Dersom stigen begynner å gli med en hastighet $y'(t)$ nedover vegg, hvilket av alternativene er et uttrykk for hastigheten $x'(t)$ til nedre del av stigen langs bakken?

- A) $-\frac{y(t)y'(t)}{2x(t)}$
- B) $\frac{3x(t)y(t)}{y'(t)}$
- C) $\frac{y(t)x(t)}{y'(t)}$
- D) $-\frac{y(t)y'(t)}{x(t)}$
- E) $-\frac{y'(t)}{3}$

Riktig svar: D).

Kort begrunnelse: De to størrelser er koblet sammen ved ligningen $x(t)^2 + y(t)^2 = 3^2$. Ved derivasjon med hensyn på t får vi $2x'(t)x(t) + 2y'(t)y(t) = 0$, og herfra skriver vi den ukjente hastigheten $x'(t)$ ved hjelp av den kjente, som er $y'(t)$.

(Fortsettes på side 9.)

Oppgave 16

La f være gitt ved $f(x) = xe^{x^2}$, og la $g = g(y)$ være den omvendte funksjonen til f . Hva er $g'(e)$?

- A) $\frac{1}{2e}$
- B) $\frac{1}{3e}$
- C) $\frac{1}{e}$
- D) 1
- E) e

Riktig svar: B).

Kort begrunnelse: Den generelle reglen er at $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ når vi vet at y er slik at $y = f(x)$. Her er $f'(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}$. I oppgaven er $y = e$ og vi skal da finne x slik at $f(x) = e$. Av funksjonsuttrykket ser vi at $f(1) = 1 \cdot e^{1^2} = e$. Så vi bruker $x = 1$. Men $f'(1) = e + 2e = 3e$. Så er $g'(e) = 1/(f'(1)) = \frac{1}{3e}$.

Oppgave 17

Hva er den deriverte til $e^{3x} \arcsin x^3$?

- A) $3e^{3x} \left(\arcsin x^3 + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right)$
- B) $e^{3x} \left(\arcsin x^3 + \frac{1}{\sqrt{1-x^6}} \right)$
- C) $3e^{3x} \left(\arcsin x^3 + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} \right)$
- D) $\frac{e^{3x}}{\sqrt{1-x^6}}$
- E) $\frac{9x^2 e^{3x}}{\sqrt{1-x^6}}$

Riktig svar: C).

Kort begrunnelse: Vi deriverer $f(x) = e^{3x} \arcsin x^3$ etter produktregelen og med kjerneregelen.

Oppgave 18

Verdien til integralet $\int_0^1 \frac{1}{3x^2+1} dx$ er:

- A) $\frac{\pi}{9}$
- B) $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$
- C) $3 \ln 2$

(Fortsettes på side 10.)

D) $2 \ln 3$ E) $\frac{\pi}{3}$

Riktig svar: B).

Kort begrunnelse: Opp til en konstant foran x er en antiderivert til integranden en arctan-funksjon. Vi skriver om integranden og får

$$f(x) = \frac{1}{3x^2 + 1} = \frac{1}{(\sqrt{3}x)^2 + 1},$$

som har en antiderivert $F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan(\sqrt{3}x)$. Dermed får vi

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{3x^2 + 1} \, dx &= F(1) - F(0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\arctan(\sqrt{3}) - \arctan 0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} - 0 \right) \\ &= \frac{\pi\sqrt{3}}{9}. \end{aligned}$$

SLUTT