

Konvergens av Taylor-rekker (Kola 10.3, Kalk 12.8)

Teorem

La I være et intervall som inneholder a , og anta at f er uendelig mange ganger deriverbar på I . For å bevise at

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots$$

for alle $x \in I$ (dvs. vise at taylorrekken konvergerer mot $f(x)$ på I), trenger vi bare å vise at restleddet oppfylder

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \text{for alle } x \in I.$$

Bevis La $x \in I$ være et valgt tall. Taylors formel gir

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

der $T_n(x)$ er Taylorpolynomet av orden n utviklet i a .

Hvis $R_n(x) \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$, følger at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = f(x)$$

Men $T_n(x)$ er jo delsummene av taylorrekken, så her står det at taylorrekken konvergerer mot $f(x)$. $\square$

Teorem Vi har:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

for $x \in (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

Bevis (1) $f(x) = e^x$

Taylorrekken har vi fra før. Vi har $a = 0$, og

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| \quad (c \text{ mellom } 0 \text{ og } x)$$

$$\leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} \cdot |x|^{n+1} = e^{|x|} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$\rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$ (fakultet dominerer potens)

(2) $f(x) = \sin x$ (tilfellet $\cos x$ er helt tilsvarende)

Rekken finnes ved utregning. Vi har

$$|R_n(x)| = \frac{1}{(n+1)!} \cdot |f^{(n+1)}(c)| \cdot |x|^{n+1} \quad (c \text{ mellom } 0 \text{ og } x)$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot 1 \cdot |x|^{n+1} \rightarrow 0 \quad (\text{fak. dom. potens}).$$

□

Potensrekker (Kola 10.4, Kalk 12.6)

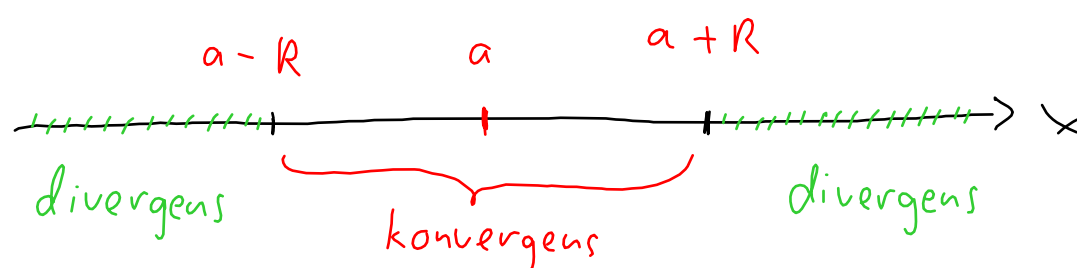
Taylorrekker er eksempler på potensrekker. En potensrekke er en rekke på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n = C_0 + C_1 (x-a) + C_2 (x-a)^2 + \dots$$

For å avgjøre for hvilke $x \in \mathbb{R}$ en slik rekke konvergerer, kan vi vanligvis bruke forholdstesten. Vi oppdager da alltid at det fins $R \geq 0$ slik at

- rekken konvergerer absolutt for $|x-a| < R$
- — " — divergerer for $|x-a| > R$

Tallet R kalles konvergensradien for potensrekken, og a kalles potensrekkenes sentrum.



Tilfellet $R = \infty$ (konv. for alle $x \in \mathbb{R}$) og $R = 0$ (konvergens kun for $x = a$) kan forekomme. Hvis $0 < R < \infty$, må endepunktene $x = a - R$ og $x = a + R$ av konvergensintervallet sjekkes spesielt ved innsetting.

eks. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 5^n}$ For hvilke $x \in \mathbb{R}$ konvergerer denne?

Løsn. Forholdstesten:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1) \cdot 5^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 5^n}{(x-2)^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x-2| \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{1}{5} \cdot |x-2| \end{aligned}$$

Altså konvergens hvis

$$\frac{1}{5} \cdot |x-2| < 1, \text{ dvs. } |x-2| < 5$$

og divergens hvis $|x-2| > 5$. Altså $R = 5$.

Endepunkter:

$x = 2 + 5 = 7$ indsatt gir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7-2)^n}{n \cdot 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (divergent p-rekke)

$x = 2 - 5 = -3$ indsatt gir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3-2)^n}{n \cdot 5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{n \cdot 5^n}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{-5}{5}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

(konv. ved alternerende rekke-testen).

Så rekken konvergerer for $x \in [-3, 7)$

