

Løsningsforslag prøveeksamen
MAT 1100 lørdag 29. 11. 2025

Oppgave 1

Integralet går som $\int_2^{\infty} \frac{1}{x} dx$ (divergent p-integral)

Vi sammenlikner med det i GS-testen for uegentlige integraler:

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x-1}{x^2-x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-x}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 3$$

Altså divergerer integralet ved GS-testen for uegentlige integraler.

Oppgave 2

a) Vi har

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\sqrt[3]{x}} \quad \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}}}{1+x^2} = 3 \cdot \frac{0}{1} = 0 = f(0) \end{aligned}$$

Altså er f kontinuerlig i $x=0$

b)

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\arctan h}{h^{1/3}} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan h}{h^{4/3}} \quad \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+h^2}}{\frac{4}{3} h^{1/3}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{h^{1/3}(1+h^2)} \quad (\text{denne grensen fins ikke}) \end{aligned}$$

Altså er f ikke deriverbar i $x=0$

Oppgave 3

a) Taylorrekken til $\sin x$ utviklet i $a = 0$ (formelsamling):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Innsetting av $2x$ for x gir

$$\sin 2x = (2x) - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \dots$$

Ved unikhethet av Taylorrekker følger at

$$T_5(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{32}{120}x^5 = \underline{\underline{2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5}}$$

b) Ved Taylors formel har vi

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \boxed{\frac{1}{6!} \sin^{(6)}(c) \cdot x^6} \text{ restledd}$$

der c er mellom 0 og x . Innsetting av $2x$ for x gir at

$$\sin 2x = T_5(x) + \boxed{\frac{1}{6!} \sin^{(6)}(c) \cdot (2x)^6} \text{ restledd}$$

der c nå er mellom 0 og $2x$. Vi har $x \in [-1, 1]$, så vi får

$$\left| \frac{1}{6!} \sin^{(6)}(c) \cdot (2x)^6 \right| \leq \frac{1}{720} \cdot 1 \cdot 2^6 \cdot |x|^6$$

$$\leq \frac{64}{720} \cdot 1^6$$

$$< \frac{1}{10}$$

Altså tilnærmer $T_5(x)$ funksjonen $f(x) = \sin 2x$ med feil mindre enn $\frac{1}{10}$ på intervallet $x \in [-1, 1]$.

Oppgave 4

$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx = \int_0^{\ln 2} u^2 e^u du = \left[u^2 e^u \right]_0^{\ln 2} - 2 \int_0^{\ln 2} u \cdot e^u du$$

$$\begin{aligned} u &= \ln x, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, \quad x = e^u \\ du &= \frac{1}{x} dx, \quad dx = x du = e^u du \\ x=1 \text{ gir } u &= \ln 1 = 0 \\ x=2 \text{ gir } u &= \ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Delvis } F(u) &= u^2 & G'(u) &= e^u \\ F'(u) &= 2u & G(u) &= e^u \end{aligned}$$

$$= (\ln 2)^2 \cdot e^{\ln 2} - 2 \left\{ \left[u e^u \right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^u du \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Delvis } F(u) &= u & G'(u) &= e^u \\ F'(u) &= 1 & G(u) &= e^u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (\ln 2)^2 \cdot 2 - 2 \left\{ \ln 2 \cdot e^{\ln 2} - \left[e^u \right]_0^{\ln 2} \right\} \\ &= 2 (\ln 2)^2 - 2 \cdot \ln 2 \cdot 2 + 2 \left[e^{\ln 2} - e^0 \right] \\ &= \underline{\underline{2 (\ln 2)^2 - 4 \ln 2 + 2}} \end{aligned}$$

Oppgave 5

Forholdstesten gir

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{[(n+1)^2 + 1](x-7)^{n+1}}{(n+1)^3 \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{n^3 \cdot 3^n}{[n^2 + 1] \cdot (x-7)^n} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} \cdot \frac{(n+1)^2 + 1}{n^2 + 1} \cdot \frac{3^n}{3^{n+1}} \cdot (x-7)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} \cdot \frac{n^2 + 2n + 2}{n^2 + 1} \cdot |x-7| \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}} \cdot \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \cdot |x-7| \cdot \frac{1}{3}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot |x-7| \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} |x-7|$$

Altså konvergens hvis $\frac{1}{3} |x-7| < 1$, dvs. $|x-7| < 3$
og divergens hvis $|x-7| > 3$.

(Oppgave 5 forts.)

Sjekker endepunktene:

$x = 10$ gir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$

$$\forall i \text{ har } \frac{n^2+1}{n^3} > \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n},$$

$$\text{og } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergerer (p-rekke)}$$

Altså divergens ved sammenlikningstesten.

$x = 4$ gir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3} \cdot (-1)^n$

Denne rekken er alternerende, og vi har

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}{1} = 0$$

Med $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3}$ får vi

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x^3 - (x^2+1) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2x^4 - 3x^4 - 3x^2}{x^6}$$

$$= \frac{-x^4 - 3x^2}{x^6} < 0 \text{ for } x > 0$$

Det følger at $|a_n| = f(n) > f(n+1) = |a_{n+1}|$ for alle n ,

så konvergens ved alternerende rekke-testen.

Alt i alt: Konvergensintervallet for potensrekken er $x \in [4, 10]$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n x^{4n+1}}{(2n)!} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n (x^2)^{2n}}{(2n)!} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2^2)^n \cdot (x^2)^{2n}}{(2n)!}$

$$= x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n} \cdot (x^2)^{2n}}{(2n)!} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (2x^2)^{2n}}{(2n)!}$$

Kjent rekke:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \underline{\underline{x \cdot \cos(2x^2)}} \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}$$

Oppgave 6

$$f(x) = \ln(\sin x) \quad D_f = (0, \pi)$$

a) Vi har

$$\begin{aligned} 1 + [f'(x)]^2 &= 1 + \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

$$\text{Så} \quad L = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx$$

Fordi $\sin x > 0$ når $x \in (0, \pi)$

Videre er

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$$

$$b) \quad L = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = - \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{1 - u^2} du = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - u^2} du$$

$$\begin{aligned} u &= \cos x \text{ gir } \frac{du}{dx} = -\sin x \\ du &= -\sin x dx \quad dx = -\frac{1}{\sin x} du \\ x &= \frac{\pi}{3} \text{ gir } u = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{\pi}{2} \text{ gir } u = 0 \end{aligned}$$

Delbrøkkoppsettning:

$$\frac{1}{1 - u^2} = \frac{1}{(1+u)(1-u)} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{1-u} \quad \text{gir}$$

$$1 = A(1-u) + B(1+u)$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{u=1} \text{ gir } 1 = 2B \\ \underline{u=-1} \text{ gir } 1 = 2A \end{array} \right\} \text{ så } A = B = \frac{1}{2}$$

Så

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - u^2} du = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+u} du + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-u} du \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\ln(1+u) \right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[\ln(1-u) \right]_0^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\ln \frac{3}{2} - 0 \right) - \left(\ln \frac{1}{2} - 0 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \ln 3}} \end{aligned}$$

Oppgave 7

a) Hvis Δt er liten, har vi $y(t+\Delta t) \approx y(t) + \overset{(1)}{u(t) \cdot \Delta t} - \overset{(2)}{k \cdot y(t) \cdot \Delta t}$

Grunnen er at (1) er tilnærmet lik vannmengden som strømmer ned i bassenget fra slangen i løpet av tidsrommet Δt , mens (2) er tilnærmet lik vannmengden som renner ut av sluket i tidsrommet Δt . Dette gir

$$y(t+\Delta t) - y(t) \approx u(t) \cdot \Delta t - k \cdot y(t) \cdot \Delta t$$

$$\frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx u(t) - k \cdot y(t)$$

Når $\Delta t \rightarrow 0$, blir tilnærmingen bedre og bedre. I grensen får

$$y'(t) = u(t) - k \cdot y(t), \text{ dvs. } \underline{y'(t) + k \cdot y(t) = u(t)}$$

b) Likningen er $y' + ky = at+b$ (Første ordens lineær difflikning)

Vi får $\int k dt = kt$
 $p = e^{kt} = e^{kt}$

Ganger med p :

$$e^{kt} y' + k e^{kt} y = (at+b) e^{kt}$$

$$\frac{d}{dt} (e^{kt} \cdot y) = (at+b) e^{kt}$$

$$e^{kt} \cdot y = \int (at+b) e^{kt} dt$$

$$\int (at+b) e^{kt} dt = \frac{1}{k} (at+b) e^{kt} - \frac{a}{k} \int e^{kt} dt$$

Delvis $F(t) = at+b$ $G'(t) = e^{kt}$
 $F'(t) = a$ $G(t) = \frac{1}{k} e^{kt}$

$$= \frac{1}{k} (at+b) e^{kt} - \frac{a}{k^2} e^{kt} + C$$

$$\text{Så } e^{kt} y(t) = \frac{1}{k} (at+b) e^{kt} - \frac{a}{k^2} e^{kt} + C$$

$$\underline{y(t) = \frac{1}{k} (at+b) - \frac{a}{k^2} + C e^{-kt}} \quad (\text{generell løsning})$$

$$\text{Kravet } y(0) = 0 \text{ gir } 0 = \frac{b}{k} - \frac{a}{k^2} + C e^0$$

$$\text{dvs. } C = \frac{a}{k^2} - \frac{b}{k}$$

$$\text{Løsning: } \underline{y(t) = \left(\frac{a}{k^2} - \frac{b}{k} \right) e^{-kt} + \frac{1}{k} (at+b) - \frac{a}{k^2}}$$

Slutt!