

Løsningsforslag utsatt eksamen
MAT1100 januar 2026

Oppgave 1

Skal avgjøre om rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 6n}{n^6 + 3}$ konvergerer

Rekken går som $\sum \frac{n^2}{n^6} = \sum \frac{1}{n^4}$ (konvergent p-rekke, $p = 4$)

Sammenlikner med den i GS-testen:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2 + 6n}{n^6 + 3}}{\frac{1}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 + 6n^5}{n^6 + 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{6}{n}}{1 + \frac{3}{n^6}} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

Altså konvergerer rekken.

Oppgave 2

a) Volumet V er gitt ved

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi \cdot [f(x)]^2 dx = \int_0^1 \pi \left[\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right]^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \pi [\arctan x]_0^1 = \pi [\arctan 1 - 0] = \pi \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

b) Volumet V av omdreingslegemet på intervallet $[0, \infty)$ er gitt ved

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\infty} \pi \cdot [f(x)]^2 dx = \pi \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)^2 dx \\ &= \pi \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \pi \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctan x]_0^b \\ &= \pi \cdot \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctan b - 0] = \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

Oppgave 3

a) Vi har $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$ for $x \neq 0$, og $f(0) = 2$.

For $x \neq 0$ får vi

$$f'(x) = \frac{(\cos 2x) \cdot 2 \cdot x - (\sin 2x) \cdot 1}{x^2} = \underline{\underline{\frac{2x \cdot \cos 2x - \sin 2x}{x^2}}}$$

Dette gir

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos 2x - \sin 2x}{x^2}$$

$$\stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{2 \cos 2x} + 2x(-\sin 2x) \cdot 2 - \cancel{2 \cos 2x}}{2} = \frac{0}{2} = \underline{\underline{0}}$$

b) Siden $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x}{1} = 2 = f(0)$,

er f kontinuertlig i $x=0$. Siden vi fra a) dessuten vet at f er deriverbar for $x \neq 0$ og at

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0,$$

følger at $f'(0) = 0$.

Altså er f deriverbar i $x=0$.

Alternativt:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2h}{h} - 2}{h} \\ &\stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \text{osv.} \end{aligned}$$

Oppgave 4

Delbrøkoppspalting:

$$\frac{2x^2 + 9x + 1}{(x+9)(x^2+1)} = \frac{A}{x+9} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \quad \text{gir}$$

$$2x^2 + 9x + 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+9)$$

$$\textcircled{2x^2} + \textcircled{9x} + 1 = \textcircled{Ax^2} + A + \textcircled{Bx^2} + \textcircled{9Bx} + \textcircled{Cx} + 9C$$

Altså

$$2 = A + B \quad \text{I}$$

$$9 = 9B + C \quad \text{II}$$

$$1 = A + 9C \quad \text{III}$$

(Oppgave 4 forts.)

I - III gir $1 = B - 9C$, dvs. $B = 1 + 9C$

II gir da $9 = 9(1 + 9C) + C$

$$9 = 9 + 81C + C, \text{ dvs. } 0 = 82C, \quad \underline{C = 0}$$

II gir nå $\underline{B = 1}$, og III gir $\underline{A = 1}$

Så

$$\int \frac{2x^2 + 9x + 1}{(x+9)(x^2+1)} dx = \int \frac{1}{x+9} dx + \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

Høyre integral: $u = 1+x^2$
 $du = 2x dx$

 $\rightarrow = \underline{\underline{\ln|x+9| + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C}}$

Oppgave 5

a) Hvis Δt er liten, er det rimelig å anta at for $t \geq 0$ har vi

$$y(t + \Delta t) \approx y(t) + 0 - 4 \cdot \sqrt{y(t)} \cdot \Delta t$$

Grunnen er at det ikke renner vann inn i karet (derfor leddet 0), og at leddet $-4 \cdot \sqrt{y(t)} \cdot \Delta t$ er tilnærmet lik vannmengden som renner ut av sluket i bunnen i tidsrommet Δt . Dette gir

$$y(t + \Delta t) - y(t) \approx 0 - 4 \sqrt{y(t)} \Delta t$$

Divisjon med Δt gir så

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \approx -4 \sqrt{y(t)}$$

Når $\Delta t \rightarrow 0$, blir denne tilnærmingen bedre og bedre. I grensen fås

$$y'(t) = -4 \sqrt{y(t)}$$

dvs.

$$\underline{\underline{y' = -4\sqrt{y}}}$$

b) Difflikningen $y' = -4\sqrt{y}$ er separabel, og den kan skrives

$$\frac{dy}{dt} = -4\sqrt{y}$$

(Oppgave 5 forts.)

Løser differensiallikningen med initialkravet $y(0) = 2500$:

$$dy = -4\sqrt{y} dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int (-4) dt$$

$$\int y^{-\frac{1}{2}} dy = -4t + C$$

$$2 y^{\frac{1}{2}} = C - 4t$$

$$y^{\frac{1}{2}} = \frac{C}{2} - 2t$$

$$y(t) = \left(\frac{C}{2} - 2t\right)^2$$

← Her mister vi konstantløsningen $y(t) = 0$,
men denne tilfredsstiller ikke kravet $y(0) = 2500$

← Her ser vi at hvis $y(t)$ skal tilfredsstille
differensiallikningen for $t > 0$, må vi ha $C > 0$

Initialkravet $y(0) = 2500$ gir nå $2500 = \left(\frac{C}{2}\right)^2$, dvs. $\frac{C}{2} = 50$

(Brukte her at vi må ha $C > 0$.) Altså $C = 100$, så løsningen er

$$\underline{\underline{y(t) = (50 - 2t)^2}}$$

Tomt kar tilsvarende $y(t) = 0$, som gir $50 - 2t = 0$, dvs. $\underline{t = 25}$.

I følge differensiallikningsmodellen tar det altså 25 minutter før karet er tomt.

Oppgave 6

a) Vi har $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$ for alle $x \in \mathbb{R}$

Så $\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots$ — " —

Ved unikheth av Taylorrekker er

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} = 1 - \frac{4x^2}{2 \cdot 1} + \frac{2^4 x^4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \underline{\underline{1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4}} \end{aligned}$$

b) Ved Taylors formel er $f(x) = T_4(x) + R_4(x)$, der

$$|R_4(x)| = \left| \frac{1}{5!} \cdot f^{(5)}(c) \cdot (x-0)^5 \right| = \frac{1}{5!} \cdot 2^5 \cdot |\sin c| \cdot |x|^5$$

$$\leq \frac{1}{120} \cdot 2^5 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{120} < \underline{\underline{\frac{1}{100}}}$$

Oppgave 7

a) Gitt rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n (n+1)} x^n$

Forholdstesten:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{2^{n+1} (n+2)} \cdot \frac{2^n (n+1)}{(-1)^n x^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{n} \rightarrow 0}{1 + \frac{2}{n} \rightarrow 0} \cdot |x| = \frac{1}{2} \cdot |x| \end{aligned}$$

Altså konvergens for

$$\frac{1}{2} |x| < 1, \text{ dvs. } |x| < 2$$

og divergens for $|x| > 2$. Sjekker endepunktene:

$x=2$ gir $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{2^n \cdot (n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ (konvergerer ved alternierende rekke-testen)

$x=-2$ gir $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-2)^n}{2^n \cdot (n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(-1) \cdot (-2)]^n}{2^n \cdot (n+1)}$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^n (n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ (Går som $\sum \frac{1}{n}$, divergent p-rekke med $p=1$. Divergens ved GS-testen)

Så rekken konvergerer for $x \in (-2, 2]$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \cdot 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$ med $x = \frac{1}{2}$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \dots \quad (1)$$

Dette likner på en kjent rekke for $\ln(1+x)$. Vi har

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad (2)$$

for $x \in (-1, 1]$. Denne rekken kan f.eks. fås fra rekken

$$\ln(1-x) = - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots \right)$$

i formelsamlingen ved å sette inn $(-x)$ for x .

Divisjon med x på begge sider i (2) gir at

$$\frac{1}{x} \ln(1+x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \dots$$

for alle $x \in (-1, 1]$, $x \neq 0$. Dette er udyktig rekken (1), så innsetting av $x = \frac{1}{2}$ gir at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)2^n} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \ln(1 + \frac{1}{2}) = 2 \ln \frac{3}{2}$

Alternativ løsning av 7b) (direkte beregning)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \cdot 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} x^n \quad \left(\text{med } x = \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt$$

Leddelvis
integrasjon

$$= \frac{1}{x} \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt = \frac{1}{x} \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n \right) dt$$

Geometrisk
rekke med
 $a=1$, $r=-t$

$$= \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{1-(-t)} dt = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$$

$$= \frac{1}{x} \left[\ln(1+t) \right]_0^x = \frac{1}{x} \left[\ln(1+x) - \ln(1+0) \right]$$

$$= \frac{1}{x} \ln(1+x)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{2 \ln \frac{3}{2}}}$$

SLUTT