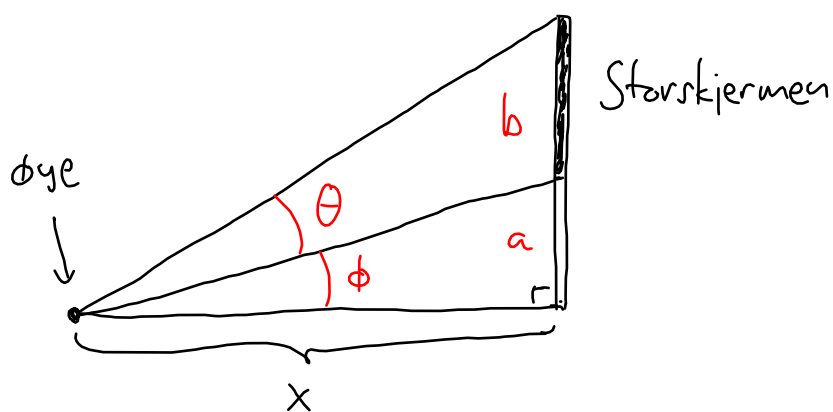


Løsningsforslag oblig 2 Mat 1100 H25

Oppgave 1

a)

Figur:



Vi ser at

$$\tan \phi = \frac{a}{x}$$

$$\tan(\phi + \theta) = \frac{a+b}{x}$$

Så siden vinklene ϕ og θ åpenbart er mellom 0 og 90 grader, får vi

$$\phi = \arctan\left(\frac{a}{x}\right) \quad \text{og} \quad \phi + \theta = \arctan\left(\frac{a+b}{x}\right)$$

Altså

$$\theta(x) = \arctan\left(\frac{a+b}{x}\right) - \phi = \underline{\underline{\arctan\left(\frac{a+b}{x}\right) - \arctan\left(\frac{a}{x}\right)}}$$

b) For å finne maksimum for $\theta(x)$, deriverer vi:

$$\theta'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{a+b}{x}\right)^2} \cdot (a+b) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{1 + \left(\frac{a}{x}\right)^2} \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{a}{x^2 + a^2} - \frac{a+b}{x^2 + (a+b)^2}$$

$$\text{Så } \theta'(x) = 0 \text{ gir } \frac{a}{x^2 + a^2} = \frac{a+b}{x^2 + (a+b)^2}$$

$$a(x^2 + (a+b)^2) = (a+b)(x^2 + a^2)$$

$$\cancel{a}x^2 + \underline{a^3} + 2a^2b + ab^2 = \cancel{a}x^2 + \underline{a^3} + bx^2 + a^2b$$

$$a^2b + ab^2 = bx^2$$

$$a^2 + ab = x^2$$

$$x = \sqrt{a^2 + ab} = \underline{\underline{\sqrt{a(a+b)}}}$$

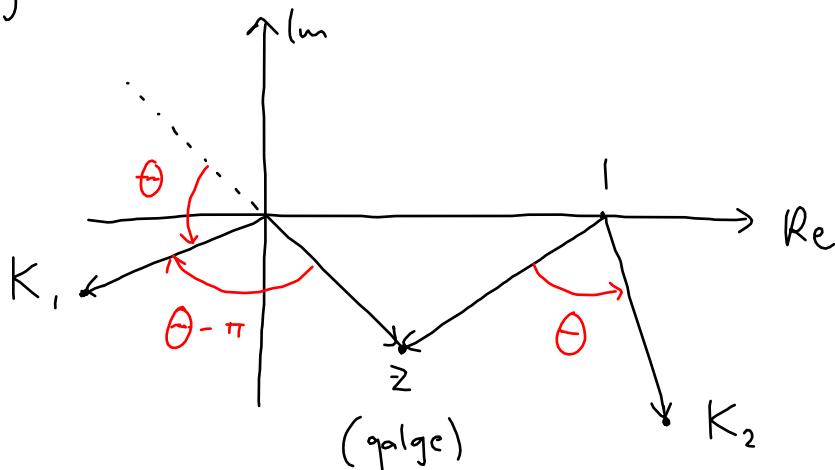
Siden $\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x) = 0$ og $\theta(x) > 0$ for $x \in (0, \infty)$, er dette

makspunktet for $\theta(x)$. Avstanden med maks synsvinkel er altså $\underline{\underline{x = \sqrt{a(a+b)}}}$

Oppgave 2

Vi bruker at multiplikasjon av et komplekst tall med $e^{i\phi}$ dreier vektoren ut til punktet en vinkel ϕ i positiv omløpsretning (mot klokken) når $\phi > 0$, og i motsatt retning når $\phi < 0$.

Figur:



På figuren har vi satt
 $\theta = 70^\circ$

Vi løser dermed like godt problemet for generell θ .

La s være skattens posisjon. Vi har da $s = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$

Dette gir

$$s = \frac{1}{2} \left(\underbrace{z \cdot e^{i(\theta - \pi)}}_{K_1} + \underbrace{(z - 1) \cdot e^{i\theta} + 1}_{K_2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(z e^{i\theta - i\pi} + z e^{i\theta} - e^{i\theta} + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(z e^{i\theta} \cdot \underbrace{e^{-i\pi}}_{-1} + z e^{i\theta} + 1 - e^{i\theta} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (1 - e^{i\theta}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) - i \cdot \frac{1}{2} \sin \theta$$

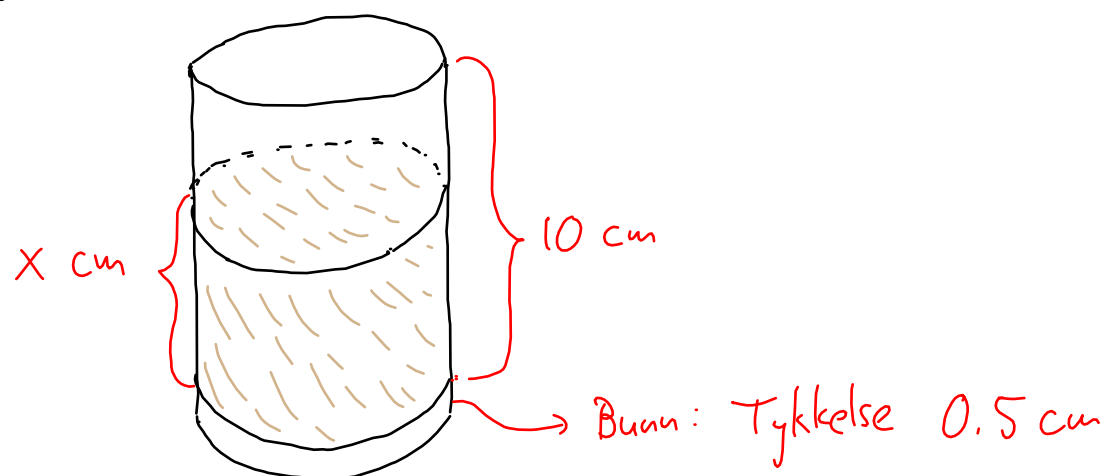
Med $\theta = 70^\circ$ innsett får vi koordinatene til skatten:

$$s = \frac{1}{2} (1 - \cos 70^\circ) - i \cdot \frac{1}{2} \sin 70^\circ \approx \underline{\underline{0,329 - 0,467 i}}$$

For å finne skatten kan du altså starte ved vestlige palme, gå 32,9 % av avstanden mellom palmene i retning østlig palme, dreie 90° til høyre og gå 46,7 % av avstanden mellom palmene.

Oppgave 3

a) Figuren så slik ut:



Forklaring til Arnes regning:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Masse} & & \text{Masse} & & \text{Masse} \\ \text{bunn} & & \text{vegg} & & \text{innhold} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (30 + 70 + \underbrace{\pi \cdot 3^2 \cdot x \cdot 1}_{\substack{\text{volum} \\ \text{innhold}}}) \cdot \underbrace{T(x)}_{\substack{\text{masse tetthet} \\ \text{innhold}}} = 30 \cdot 0,25 + 70 \cdot 5,5 + \pi \cdot 3^2 \cdot x \cdot 1 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right)}_{\substack{\text{H\o{y}de til} \\ \text{tyngdepunkt} \\ \text{innhold}}} \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \text{Masse} & \text{Masse} & & \text{H\o{y}de} & \text{H\o{y}de til} & \text{H\o{y}de til} \\ \text{bunn} & \text{vegg} & & \text{til tyngde-} & \text{tyngdepunkt} & \text{tyngdepunkt} \\ & & & \text{punkt bunn} & \text{vegg} & \text{innhold} \end{array}$$

Alt så har han bare satt inn i sammenhengen som står over punkt a).

Dette gir

$$(100 + 9\pi x)T(x) = 392,5 + 9\pi x \cdot \frac{1}{2}(x+1)$$

$$(200 + 18\pi x)T(x) = 785 + 9\pi x(x+1)$$

$$T(x) = \underline{\underline{\frac{9\pi x^2 + 9\pi x + 785}{18\pi x + 200}}}$$

b) $T(0) = \frac{785}{200} = 3,925$

Tolkning: Når glasset er tomt, er tyngdepunktet 3,925 cm over bordet.

$$T(10) = \frac{990\pi + 785}{180\pi + 200} \approx 5,1$$

Tolkning: Når glasset er helt fullt, er tyngdepunktet ca. 5,1 cm over bordet.

$$c) \quad T'(x) = \frac{(18\pi x + 9\pi)(18\pi x + 200) - (9\pi x^2 + 9\pi x + 785) \cdot 18\pi}{(18\pi x + 200)^2}$$

$$T'(x) = 0 \text{ gir}$$

$$(18\pi x + 9\pi)(18\pi x + 200) - (9\pi x^2 + 9\pi x + 785) \cdot 18\pi = 0$$

$$(2x+1)(9\pi x + 100) - (9\pi x^2 + 9\pi x + 785) = 0$$

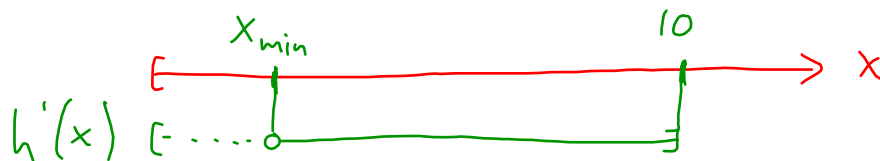
$$18\pi x^2 + 200x + 9\pi x + 100 - 9\pi x^2 - 9\pi x - 785 = 0$$

$$9\pi x^2 + 200x - 685 = 0$$

$$\text{dvs.} \quad x = \frac{-200 \pm \sqrt{40000 - 36\pi \cdot 685}}{18\pi}$$

$$\boxed{\text{Må velge + for } x > 0} \quad \downarrow \quad = \frac{\sqrt{10000 + 6165\pi} - 100}{9\pi} \stackrel{\text{def}}{=} x_{\min} \approx 2,524$$

Fra uttrykket for $T'(x)$ får vi at fortegnslinjen blir slik:



Så $T(x)$ autar på $[0, x_{\min}]$ og vokser på $[x_{\min}, 10]$

Globalt minimumspunkt $x = x_{\min} \approx 2,524$

— ~ — maksimumspunkt $x = 10$

Lokalt maksimumspunkt $x = 0$

d) Dybden $x_{\min}$ (cm) gir lavest høyde $T(x)$ for tyngdepunktet.

e) Innsetting av verdien for $x_{\min}$ i uttrykket for $T(x)$ gir

$$T(x_{\min}) \approx 3,024$$

Her oppdager vi at denne verdien ser ut til å være nøyaktig 0,5 høyere enn $x_{\min}$, slik at altså

$$T(x_{\min}) = x_{\min} + \frac{1}{2}$$

Siden $\frac{1}{2}$ akkurat er bunnens tykkelse, betyr dette at når tyngdepunktet er på sitt laveste, ligger det akkurat på overflaten av glassets innhold.

Kommentar til oppgave 3e)

At det lavest mulige tyngdepunktet må ligge på overflaten, kan man innse slik:

- Hvis tyngdepunktet ligger høyere enn overflaten, kan man senke det ved å fylle på litt i rommet under tyngdepunktets nivå.
- Hvis tyngdepunktet ligger lavere enn overflaten, kan man senke det ved å helle ut litt av det som ligger over tyngdepunktet.

Ved resonneret overfor får vi at $T(x_{\min}) = x_{\min} + \frac{1}{2}$.

Hvis man vil sjekke dette med regning, kan det f.eks. gjøres slik:

$$\text{La } r = \sqrt{10000 - 6165\pi}, \text{ da er } x_{\min} = \frac{r - 100}{9\pi}$$

Dette gir

$$T(x_{\min}) = \frac{\frac{(r-100)^2}{9\pi} + (r-100) + 785}{2r - \cancel{200} + \cancel{200}}$$

$$= \frac{r}{2r} + \frac{685}{2r} + \frac{(r-100)^2}{18\pi r}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{685 \cdot 9\pi + (r-100)^2}{18\pi r}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{6165\pi + (10000 + 6165\pi) - 2 \cdot r \cdot 100 + 10000}{18\pi r}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2r^2 - 200r}{18\pi r}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{r - 100}{9\pi} = \underline{\underline{\frac{1}{2} + x_{\min}}}$$

Dette er r^2