Repetisjon: Ubestemt integral = antiderivert

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ betyr $F'(x) = f(x)$

konstant

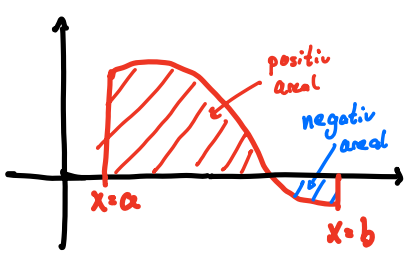
Eksempel $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$ $\qquad \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$ $\qquad \int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$

I dag: Bestemt integral = areal (Seksjon 7.2)

Vi skriver $\int_a^b f(x)\,dx$ = det bestemte integralet av f på $[a,b]$.

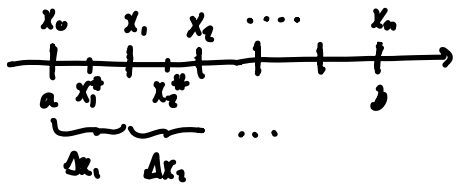
Her kan $\int_a^b f(x)\,dx$ tolkes som arealet under grafen til $f(x)$:



Vi vil bruke litt tid for en nøyaktig definisjon av det bestemte integralet (Riemannintegralet).

En partisjon av $[a,b]$ er en mengde $\Pi = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ av reelle tall slik at $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Differens $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$



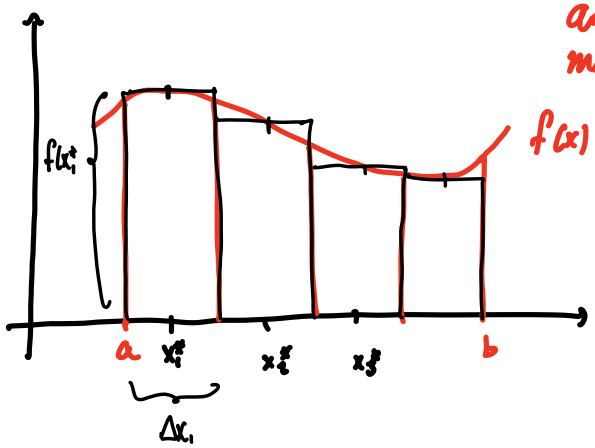
Største lengden Δx_i kalles maskevidde og skrives $|\Pi|$.

I hvert delintervall velger vi et punkt x_i^* (*tetpunkt*)

og la $U = \{x_1^*, \dots, x_n^*\}$.

Riemann sum $$R(\Pi, U) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

$f(x_i^*)\,\Delta x_i$: areal av rektangel med bredd Δx_i og høyde $f(x_i^*)$.



Vi lar maskevidden gå mot null.

Definisjon La f være en begrenset funksjon på $[a,b]$.
At f er integrerbar på $[a,b]$ betyr:
Det finns et tal I slik at

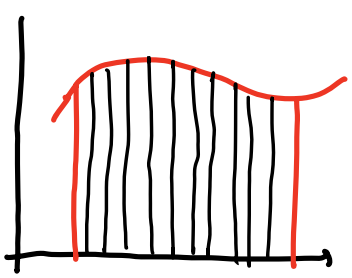
For hver $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at hvis $R(\Pi, U)$ en Riemannsum med maskevidde $|\Pi| < \delta$

Så er $|R - I| < \varepsilon$.

Definisjon: Dersom f er integrerbar er I det **bestemte integralet** av f.

Logiken er at **hver bredde** Δx_i **går mot 0**, men **antal rektangler går mot ∞**:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$$



Dersom $a = b$ er arealet **null**! $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ for alle funksjoner f.

Dersom $b < a$ er $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

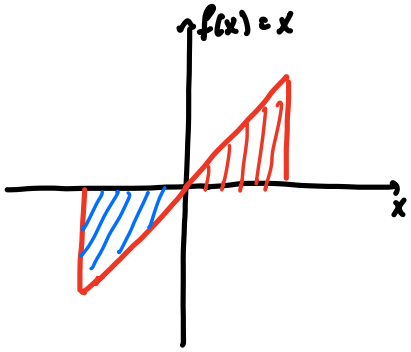
(omvendt tegn).

Eksempel:



$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(areal av trianglet)



$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$$

positiv areal = negativ areal.

Øvresummer og nedresummer

Riemannsum: $R(\Pi, U) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$

Nedresum: $S = \sum_{i=1}^{n} c_i\,\Delta x_i$ der tallene c_i

oppfyller $c_i \leq f(x)$ for alle $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Øvresum: $S = \sum_{i=1}^{n} c_i\,\Delta x_i$ der $c_i \geq f(x)$ $\forall\, x \in [x_{i-1}, x_i]$

Dersom S er nedresum er $S \leq R(\Pi, U)$.

(S er nedre begrensning.)

Vi definerer nedreintegralet

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{ S \mid S \text{ er nedresum for } f(x) \text{ på } [a,b] \}.$$

På samme måte øvreintegralet

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{ S \mid S \text{ er øvresum for } f(x) \text{ på } [a,b] \}.$$

Teorem: La f være en begrenset funksjon.

(1) Dersom f er integrerbar, er

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

(2) Dersom $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = A$ er f integrerbar og $\int_a^b f(x)\,dx = A$.

Bevis: To punkter:

(1) La $\varepsilon > 0$ være vilkårlig. Velg $\delta > 0$ slik at $|\Pi| < \delta$ gir $|R(\Pi, V) - I| < \varepsilon$.

Merk: $c_i \leq f(x)$ betyr at c_i er en nedre begrensning for $f(x)$ på $[x_{i-1}, x_i]$.

La nu $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ = største nedre begrensning.

Da er $S = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ en nedresum.

Vi velger nn punkter x_i^* slik at $f(x_i^*) < m_i + \varepsilon$.

Da er

$$S = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$> \sum_{i=1}^{n} (f(x_i^*) - \varepsilon) \Delta x_i$$

$$= R(\Pi, U) - \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$$

$$> (I - \varepsilon) - \varepsilon(b-a)$$

Dette betyr at S er vilkårlig nær I,

så $\int_a^b f(x)\,dx = I$. ∎ (1)