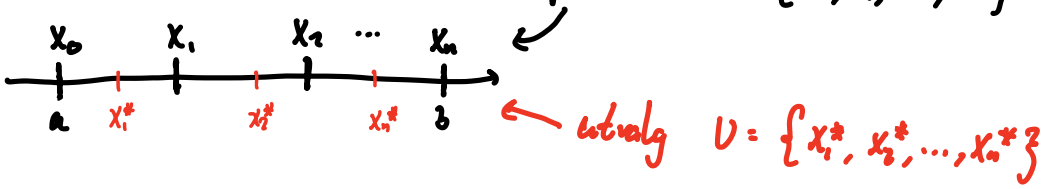
Repetisjon:



$f(x)$ begrenset funksjon: $|f(x)| \leq M$ for alle $x \in [a,b]$.

Riemannsum $\quad R(\Pi, U) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$

Nedresum $\quad S = \sum_{i=1}^{n} c_i\,\Delta x_i$

$c_i \leq f(x)$ for $x \in [x_{i-1}, x_i]$

Da $|\Pi| \to 0$: $\quad R(\Pi, U) \to \int_a^b f(x)\,dx = I$

Nedre integral $\quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{S \mid S \text{ er nedresum}\} = A_-$

Øvre integral $\quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{S \mid S \text{ er øvresum}\} = A_+$

Teorem: (1) Dersom f er integrerbar er $A_- = A_+ = I$

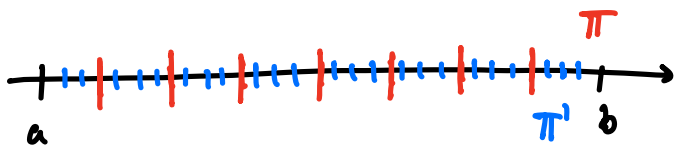
(2) Dersom $A_- = A_+$ så er f integrerbar og $I = A_- = A_+$

Bevis: (2) La $A_- = A_+ = A$. La $\varepsilon > 0$.

Vi velger nedresum S slik at $S > A - \frac{\varepsilon}{2}$

med partisjon $\Pi = \{x_0, \dots, x_n\}$.

Velg en vilkårlig Riemannsum $R(\Pi', U)$ med maskevidd $|\Pi'| < \delta$.



På hvert delintervall av Π' som er helt inne i et del-intervall til Π er $f(x)$ større eller lik tilsvarende verdi c_i for nedresum S.

På et delintervall av Π' som er "mellom" to delintervall av Π kan $f(x)$ være <u>lavere enn</u> tilsvarende verdi c_i.

Differensen er maks $2M$, der $|f(x)| \leq M$ for $x \in [a,b]$.

Det er maks $(n-2)$ slike punkter.

Da er $R[\Pi', U] \geq S - (n-2) \cdot 2M \cdot \delta$.

Velg nå $\delta < \frac{\varepsilon}{4M(n-2)}$ så $R > S - \frac{\varepsilon}{2}$

$$> \underbrace{(A - \tfrac{\varepsilon}{2}) - \tfrac{\varepsilon}{2}}_{A - \varepsilon}$$

På samme måte: øvresum gir $R < A + \varepsilon$.

Da er $-\varepsilon < R - A < \varepsilon$ så $|R - A| < \varepsilon$.

Dette betyr at f er integrerbar med integral $I = A$. ∎

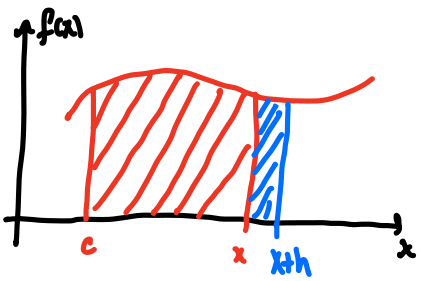
Ubestemt integral = antiderivert

Bestemt integral = areal

Disse er kombinert med analysens fundamentalteorem:

Teorem: Hvis f er kontinuerlig på I er f integrerbar på hvert lukket delintervall av I.
Hvis $c \in I$ er funksjonen $A(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ deriverbar, og $A'(x) = f(x)$.

Bild:



Arealet $A(x+h)$ er omtrent gitt ved $A(x) + h \cdot f(x)$,

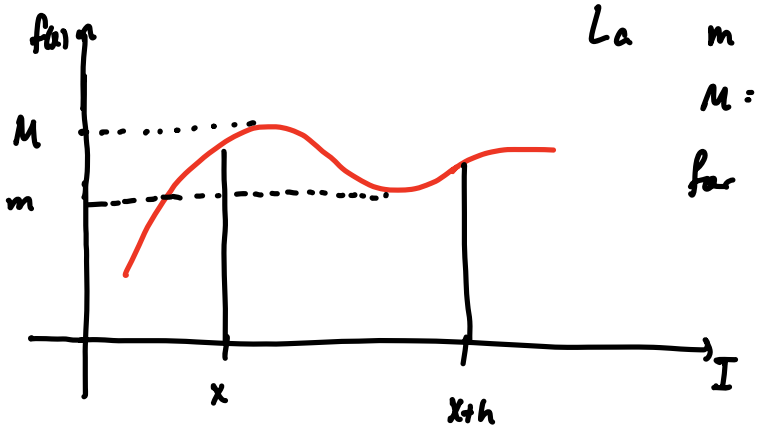
slik at $\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$.

Bevis: Strategi: vi bruker øvre og nedreintegralet!

La $A_-(x) = \int_c^x f(t)\,dt$. Vi viser at $A_-'(x) = f(x)$

(samme metode gir at $A_+'(x) = f(x)$). Dette gir at

$A_+(x) = A_-(x) + C$ men siden $A_+(c) = A_-(c) = 0$ med $C = 0$, så at f er integrerbar med integral $A(x) = A_-(x) = A_+(x)$.



La $m = \min f(t)$

$M = \max f(t)$

for $t \in [x, x+h]$.

Husk: $A_-(x+h) = \int_c^{x+h} f(t)dt = \sup\{S \mid S \text{ er nedresum på } [c, x+h]\}$

Et eksempel på nedresum på $[c, x+h]$ er $A_-(x) + mh$. Da er $A_-(x+h) \geq A_-(x) + mh$. (fordi $A_-(x+h)$ er sup).

Vi daner også øvre begrenset av $A_-(x) + Mh$, så $A_-(x+h) \leq A_-(x) + Mh$.

Da er $$m \leq \frac{A_-(x+h) - A_-(x)}{h} \leq M$$

Dersom $h \to 0$ har vi $M \to f(x)$ og $m \to f(x)$ (siden $f(x)$ er kontinuerlig).

Da er $\lim_{h \to 0} \frac{A_-(x+h) - A_-(x)}{h} = A_-'(x) = f(x)$.

På samme måte: $A_+'(x) = f(x)$, så f er integrerbar og $A'(x) = f(x)$. ∎

Eksempel • $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, da er $F'(x) = e^{-x^2}$

• $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$. Kjernereglen!

$$F' = e^{-(x^2)^2}(2x)$$

$$= 2x e^{-x^4}$$

Merk: Gitt $f(x)$ er $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ en antiderivert til $f(x)$. Den nedre grensen c er vilkårlig!

Dersom $F_1(x) = \int_{c_1}^x f(t)\,dt$ og $F_2(x) = \int_{c_2}^x f(t)\,dt$

er $F_1(x) = F_2(x) + \underbrace{\int_{c_1}^{c_2} f(t)\,dt}_{\text{"}+C\text{"}}$

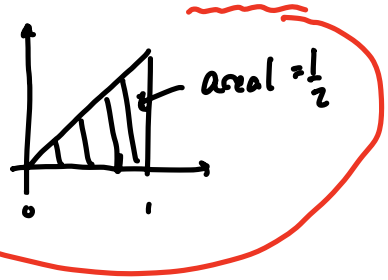
Vilkårlig nedre grense kan tolkes som en vilkårlig integrasjonskonstant!

Med analysens fundamentalteorem kan vi beregne integraler ved antiderivasjon!

Teorem: Hvis $f(x)$ og $F(x)$ er kontinuerlige på $[a,b]$ og $F'(x) = f(x)$ på (a,b) er

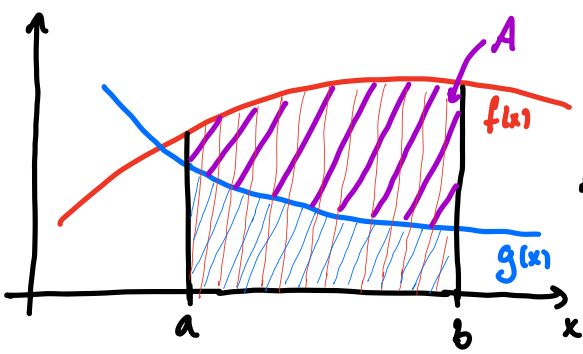
$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Eksempel: $\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$



Merk: Vi trenger ikke "+C" ved beregning av bestemte integraler!

Vi kan og beregne mellomliggende arealer!



$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$