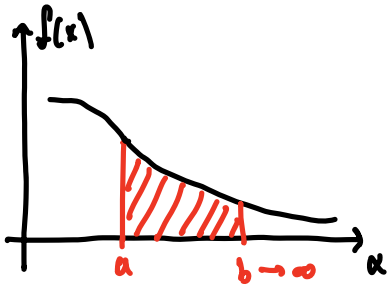
I dag: integraler over ubegrensede områden
eller integraler av ubegrensede funksjoner

Uegentlige integraler

Defineres med grenseverdier!

Ubegrenset område:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$



På samme måte:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Også dobbeltsidig:

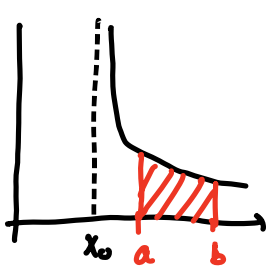
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

Ubegrensed funksjon

Hvis $f(x)$ har vertikal asymptote i $x = x_0$:

$$\int_a^{x_0} f(x)\,dx = \lim_{b\to x_0^-} \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{x_0}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to x_0^+} \int_a^b f(x)\,dx$$

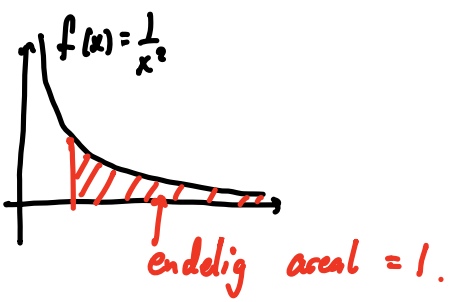


Dersom grenseverdiet eksisterer (og er endelig) sies integralet å <u>konvergere</u>, ellers sier vi at det <u>divergerer</u>.

<u>Eksempel</u>: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-x^{-1}\right]_1^b$

$= \lim_{b\to\infty} \left(\underbrace{-b^{-1}}_{\frac{1}{b}\to 0} + 1\right) = 1$

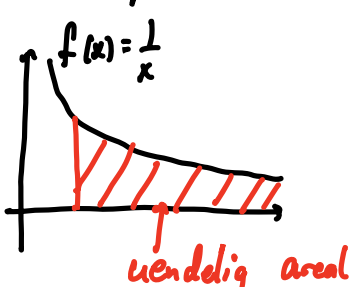
Grafen er slik:



<u>Eksempel</u>: $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\ln x\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \underbrace{\ln 1}_{=0})$

<u>Merk</u>: $\ln b \to \infty$ da $b \to \infty$.

Dette betyr at integralet er uendelig stort



<u>Teorem</u>: Integralet $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ konvergerer dersom $p > 1$ og divergerer dersom $p \leq 1$.

Bevis: Vi vet allerede at $p=1$ gir divergens.

Dersom $p \neq 1$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \right]_1^b$$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty} \left(b^{1-p} - 1 \right)$$

Dersom $p>1$ er $1-p<0$ og $b^{1-p} \to 0$

Dersom $p<1$ er $1-p>0$ og $b^{1-p} \to \infty$ ∎

Spørsmål: hvordan kan vi vite dersom et integral konvergerer?

Konvergenstester:

Teorem: Anta at $f(x)$ er kontinuerlig og $f(x) \geq 0$ på $[a, \infty)$. Da konvergerer $\int_a^\infty f(x)\,dx$ hvis og bare hvis det fins $M \geq 0$ slik at $\int_a^t f(x)\,dx \leq M$ for alle $t \in [a, \infty)$.

Bevis: La $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$, da er $F'(x) = f(t) \geq 0$

er F voksende. La $S = \sup\{F(t) \mid t > a\}$, for gitt $\varepsilon > 0$ fins t_0 slik at $S - \varepsilon \leq F(t_0) \leq S$. Siden $F(t)$ er voksende er da $S - \varepsilon \leq F(t) \leq S$ for alle $t \geq t_0$, så $F(t) \to S$, altså $\int_a^\infty f(t)\,dt$ konvergerer mot S. ∎

Eksempel

$$\int_0^\infty \cos(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\sin(x)\right]_0^b = \underbrace{\lim_{b\to\infty} \sin(b)}$$

Begrenset, men eksisterer ikke!

Merk: $\cos(x) \not\to 0$ for alle x: teoremets hypotes er ikke oppfylt!

Dersom vi har to funksjoner $f(x), g(x) \geq 0$ kan disse sammenlignes:

Teorem: La f og g være kontinuerlige og $0 \leq g(x) \leq f(x)$ for alle $x \in [a, \infty)$. Da:

1) Hvis $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergerer, konvergerer $\int_a^\infty g(x)\,dx$ også
2) Hvis $\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergerer, divergerer $\int_a^\infty f(x)\,dx$ også

Bevis: 1): Anta at $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergerer mot M.

Da er $\int_a^t g(x)\,dx \leq \int_a^t f(x)\,dx \leq M$.

$\uparrow$ siden $g(x) \leq f(x)$ og $g(x), f(x) \geq 0$

$\uparrow$ siden $F(t) = \int_a^t f\,dx$ er voksende

Da konvergerer $\int_a^\infty g(x)\,dx$ ved forrige teorem.

2) er det kontrapositive utsagnet av 1) ∎

Eksempel: Konvergerer integralet $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$?

Merk: $\sqrt{x^4+1} \geq \sqrt{x^4} = x^2$ så

$\frac{1}{\sqrt{x^4+1}} \leq \frac{1}{x^2}$ og $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergerer.

Altså konvergerer $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$!