Forrige forelesning: Vegentlige integraler

Eksempel $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ divergerer $(\to \infty)$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$ konvergerer

Teorem: La f, g være positive og kontinuerlige funksjoner, og anta at $L = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ finns og $0 < L < \infty$.

Da konvergerer $\int_a^\infty f(x)\,dx$ hvis og bare hvis $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergerer.

Bevis: Velg konstantene $P > 0$ og $Q > L$ slik at

$$P < \frac{f(x)}{g(x)} < Q \quad \text{for alle tilstrekkelig store } x.$$

Da er $Pg(x) \underset{①}{<} f(x) \underset{②}{<} Q\,g(x)$

Forrige testet:

①: Dersom $\int f(x)\,dx$ konvergerer, konvergerer og $\int Pg(x)\,dx \Rightarrow \int g(x)\,dx$ konvergerer

②: Dersom $\int g(x)dx$ konvergerer, konvergerer og

$\frac{1}{\alpha}\int f(x)dx \Rightarrow \int f(x)dx$ konvergerer. ■

Eksempel: $\int_1^\infty \frac{\cos(x)+x}{x^3+2x^2+x}dx$ konvergerer / divergerer?

Løsning: La $f(x) = \frac{\cos(x)+\sqrt{x}}{2x^2+3x+1}$.

Finn dominerende ledd: la $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}}$.

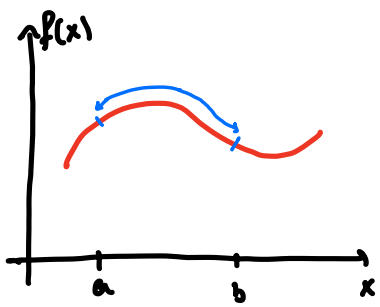
Da er

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)+\sqrt{x}}{2x^2+3x+1} \Big/ \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^{-1/2}\cos(x)}{2+3x^{-1}+x^{-2}} = \frac{1}{2}.$$

Merk: $g(x) = \frac{1}{x^p}$ med $p = \frac{3}{2} > 1$.

Altså konvergerer $\int_1^\infty f(x)dx$

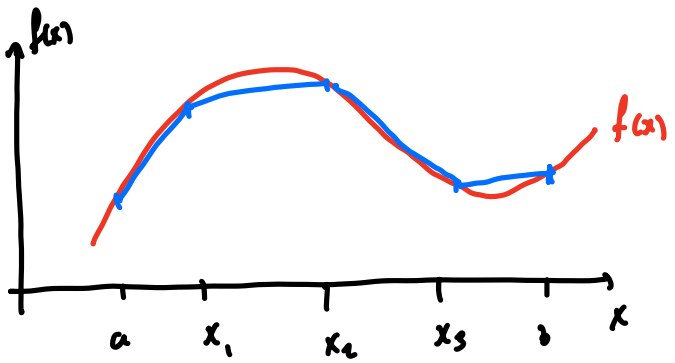
Idag: anvendelser av integraler: buelengde



Hvordan kan vi finne lengden til grafen til en funksjon?

Vi bruker en partisjon ("broddden sti")

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ med rette linjestykker:



Lengden av den brudne stien er en nedre begrensning til den totale lengden:

Definisjon **Buelengden** til $f(x)$ på intervallet $[a, b]$ er den minste øvre grensen for lengdene av brudne stier. (sup)

Merk: Lengden av et linjestykke i er

$$L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta f_i)^2}$$

der $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ og $\Delta f_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$

Teorem: Hvis $f'(x)$ er kontinuerlig er buelengden s til $f(x)$ på $[a, b]$ gitt ved

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)}\, dx$$

Bevis: Lengden av linjestykke L_i er

$$L_i = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}\right)^2}$$

Ved middelverdisetningen finns et tall x_i^* slik at

$$\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i} = f'(x_i^*), \qquad x_i^* \in (x_{i-1}, x_i).$$

Total lengde av bruddet sti er

$$L = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1 + f'(x_i^*)^2}}_{\text{Riemannsum av } g(x) = \sqrt{1+[f'(x)]^2}}.$$

(g: kontinuerlig; f': kontinuerlig)

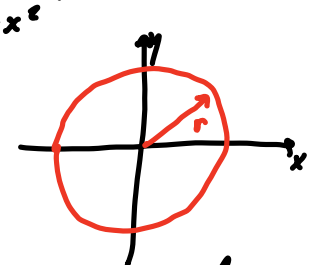
Da er L vilkårlig nær S, så S er minste øvre begrensning. ∎

Eksempel: Omkrets av sirkel.

Sirkel med radius r er gitt ved ligningen

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

$+$: øvre halvsirkel
$-$: nedre halvsirkel.



Omkrets $w = 2s$ der s er buelengde av øvre halvsirkel. La $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \le x \le r$, da er

$$S = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Her: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ så

$$S = \int_{-r}^{r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = \int_{-r}^{r} \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}}\, dx$$

$$= \int_{-r}^{r} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx$$

Seksjon 7.8: prøv $x = r\sin\theta$!

Da er $dx = r\cos\theta\, d\theta$

$\sqrt{r^2 - x^2} = r\cos\theta$

Intervall er $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Gir:

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r}{r\cos\theta} \cdot r\cos\theta\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\, d\theta = \pi r .$$

Da er omkretsen $2s = 2\pi r$ □