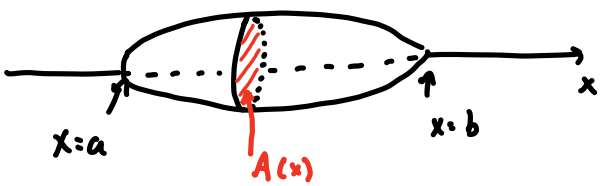
Anvendelser av integraler

Forrige forelesningen: Buelengde $s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$

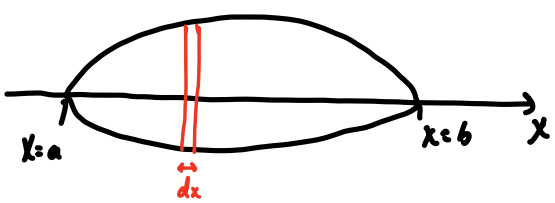
Idag: volum av romlegeme



Dersom tverrsnittsarealet av legemet i punkt x er $A(x)$, er totala volumet gitt ved

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$ (definisjon av volum).

Uformel utledning:



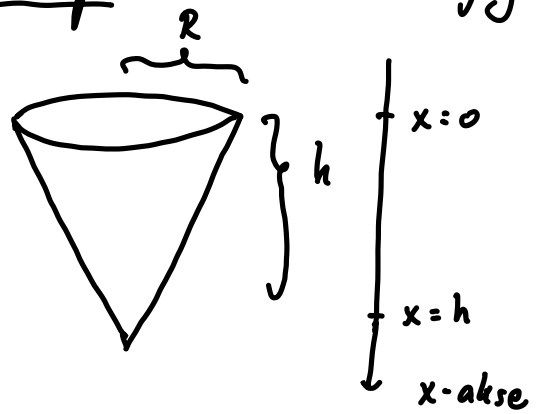
Skive med tykkelse dx gir volum

$$dV = A(x)\, dx.$$

Total volum er summen av alle bidrag dV:

$$V = \int_a^b dV = \int_a^b A(x)\, dx$$

Eksempel Sirkulær kjegle med radius R og højde h.



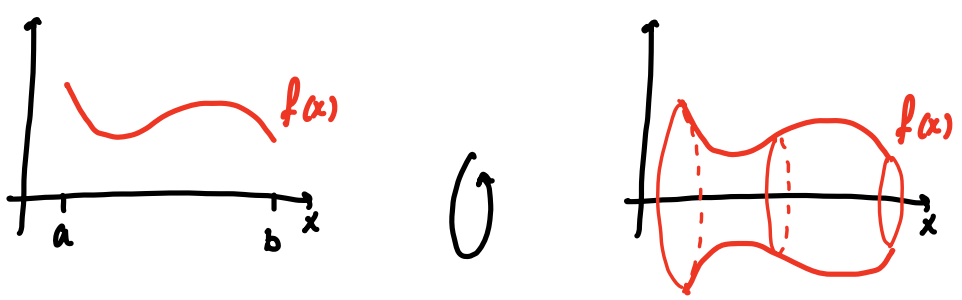
Radius i højde x er $r = \frac{x}{h} \cdot R$, gir

tverrsnittsareal i højde x $A(x) = \left(\frac{xR}{h}\right)^2 \pi$.

Volum er da $V = \int_0^h \left(\frac{xR}{h}\right)^2 \pi \, dx$

$$= \frac{R^2\pi}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{R^2\pi}{h^2}\,\frac{h^3}{3} = \frac{hR^2\pi}{3}.$$

Omdreiningslegeme om x-aksen

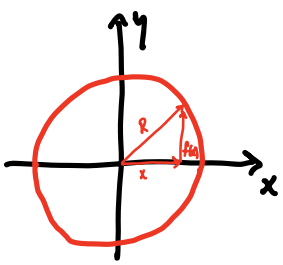


Tverrsnitt er sirkel med radius $f(x)$.

Tverrsnittsareal er $A(x) = \pi f(x)^2$.

Total volum $V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx$

Eksempel: Volum av en kule med radius R.



La $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Rotere f om x-aksen gir en kule. Volum:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi f(x)^2 \, dx = \int_{-R}^{R} \pi (R^2 - x^2) \, dx$$

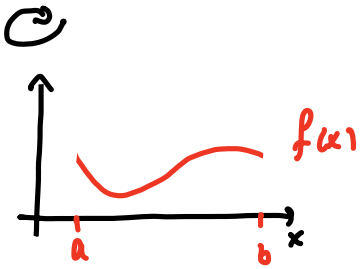
$$= \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R} = 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = 2\pi \, \frac{2R^3}{3}$$

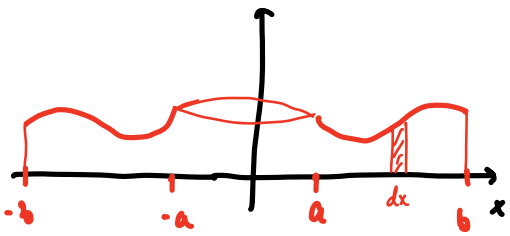
$$= \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Sylinderskallmetoden

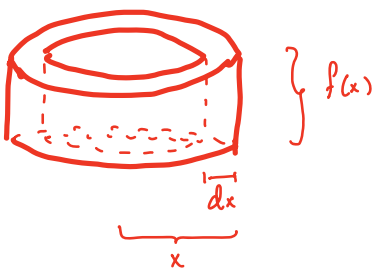
Dele opp legemet i (sylinder)skall og integrere volumen av skallen.

Omdreiningslegeme om y-aksen





Skall med tykkelse dx, radius x og høyde $f(x)$:



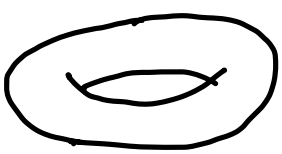
Volum av skallet:

$$dV = 2\pi x\,dx\,f(x)$$

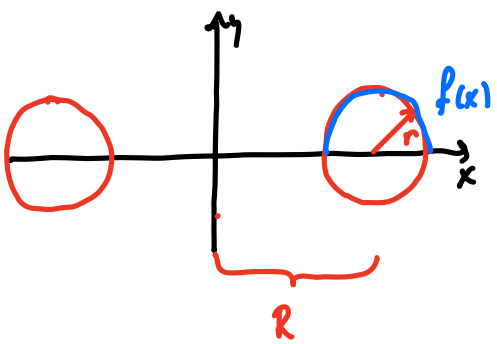
omkrets · tykkelse · høyde

Total volum $V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$.

Eksempel: Volum av en torus (doughnut)



tverrsnitt:



Volum V er $V = 2 \cdot W$ der W er omdreiningsvolum av $f(x)$ om y-aksen.

Her: $f(x) = \sqrt{r^2 - (x-R)^2}$ gir

$$W = 2\pi \int_{R-r}^{R+r} x \sqrt{r^2 - (x-R)^2}\, dx$$

La $x - R = u$ $\Rightarrow$

$$W = 2\pi \int_{-r}^{r} (u+R)\sqrt{r^2-u^2}\, du$$

$$= 2\pi \int_{-r}^{r} u\sqrt{r^2-u^2}\, du + 2\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-u^2}\, du$$

$= 0$ (ujevn integrand)

$\frac{1}{2}\pi$(areal av sirkel med radius r) $= \frac{1}{2}\pi r^2$

Alternativ:

Trig. substitusjon $u = r\sin\theta \Rightarrow du = r\cos\theta\, d\theta$

$\sqrt{r^2-u^2} = r\cos\theta\, d\theta$

gir $W = 2\pi R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2\theta\, d\theta$

$\cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$ gir

$$W = 2\pi R r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta + 1}{2}\, d\theta = 2\pi R r^2 \left[\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$= 2\pi R r^2 \left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi^2 R r^2$. Da er volumen $V = 2\pi^2 R r^2$.