Differensialligninger kap 9

Finn en ukjent funksjon ved å løse en ligning der den deriverte inngår.

Enkelt eksempel: La $y'(t) = t$.

Da er $y(t) = \frac{t^2}{2} + C$.

Merk: Løsningen har integrasjonskonstant "C".

Nytt eksempel: La $y'(t) = y(t)$

→ Den deriverte av $y(t)$ er $y(t)$ selv.

En løsning er $y(t) = e^t$.

"Generell" løsning er $y(t) = Ce^t$.

C: integrasjonskonstant

Generell betyr:

- Uansett verdien til C er $y(t)$ en løsning.
- alle løsninger kan skrives på form $y(t) = Ce^t$.

(Hvorfor er den generelle løsningen Ce^t? Vil snart vises!)

For at finne konkret verdi til C bruker vi ofte <u>initialkrav</u>: verdien til $y(t)$ i "startpunktet" (ofte $t=0$).

<u>Eksempel:</u> $y'' = -y$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

<u>Merk:</u> $(\sin(t))'' = -\sin(t)$ og $(\cos(t))'' = -\cos(t)$.

Generell løsning er $y(t) = A\sin(t) + B\cos(t)$.

Da er $y(0) = A\cdot 0 + B\cdot 1 = B = 1$

og $y'(0) = A\cdot 1 + B\cdot 0 = A = 2$.

Løsning er $y(t) = 2\sin(t) + \cos(t)$.

<u>Første ordens lineære ligninger</u>

<u>Ordenen</u> til en differensialligning er høyeste ordenen til de deriverte som forekommer i ligningen.

En første ordens <u>lineær</u> ligning er på form

$y'(t) + p(t)y(t) = q(t)$ der $p(t)$ og $q(t)$ er gitte funksjoner.

Dersom $q(t) = 0$ er ligningen homogen.

Første ordens lineære ligninger kan altid løses ved metoden med integrerende faktor.

1. Finn antiderivert $P(t)$ av $p(t)$.

   $IF = e^{P(t)}$

2. Multiplicer ligningen med IF:

   $$e^{P(t)} y'(t) + e^{P(t)} p(t) y(t) = e^{P(t)} q(t)$$

   $= \frac{d}{dt}\left[e^{P(t)} y(t) \right]$, produktregelen "bak lengs"

3. Integrer m.h.p. t:

   $$e^{P(t)} y(t) = \int e^{P(t)} q(t)\, dt \qquad \text{gir}$$

   $$y(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} q(t)\, dt$$

   indefinit integral, husk "+ C"

Eksempel: $\begin{cases} y' + \frac{1}{t} y = t^2 + 1 & \text{for} \quad t \in (0, \infty) \\ y(1) = 1 \end{cases}$

Her er $IF = e^{\int \frac{1}{t} dt} = e^{\ln t} = t$

↑ trenger ikke "+C" for IF! Trenger bare en løsning for IF

Da er $\underbrace{t y' + y}_{= \frac{d}{dt}[ty]} = t^3 + t$

gir $ty = \int (t^3 + t)\, dt = \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + C$

↑ husk +C her!

Da er $y(t) = \frac{t^3}{4} + \frac{t}{2} + \frac{C}{t}$ for $t > 0$.

Bruk nå initialbetingelsen $y(1) = 1$:

$y(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + C = 1 \Rightarrow C = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Da er $y(t) = \frac{t^3}{4} + \frac{t}{2} + \frac{C}{4t}$.

Merk: ① Dersom $y(t)$ er en løsning til diff.ligningen, kan $y(t)$ skrives på form

$$y(t) = e^{-P(t)}\left(F(t) + C\right) \qquad (*)$$

der $F'(t) = q(t)\,e^{P(t)}$

② Vanselt verdien til C er funksjonen $y(t)$ i $(*)$ en løsning til diff.ligningen.

① + ② gir at funksjonen

$y(t) = e^{-P(t)}\left(F(t) + C\right)$ er den generelle løsningen til diff.ligningen $y'(t) + p(t)\,y(t) = q(t)$.

Merk: Vi har antatt at funksjonene $p(t)$ og $q(t)\,e^{P(t)}$ er integrerbare. Dette er oppfylt dersom $p(t)$ og $q(t)$ er kontinuerlige.

Initialverdiesproblem

Teorem: La $p(t)$ og $g(t)$ være kontinuerlige på intervall I, la $a \in I$ og $b \in \mathbb{R}$. Da finnes en entydig løsning til problemet

$$\begin{cases} y'(t) + p(t)\,y(t) = g(t), & t \in I \\ y(a) = b \end{cases}$$

Bevis: Løsning $y(t)$ kan skrives

$$y(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} g(t)\,dt \quad \text{der} \quad P(t) = \int p(t)\,dt .$$

To valg: 1. Valg av antiderivert $P(t)$.

Dersom vi velger $\tilde{P}(t) = P(t) + C$ er

$$y(t) = e^{-\tilde{P}(t)} \int e^{\tilde{P}(t)} g(t)\,dt$$

$$= e^{-P(t)} \int e^{P(t)} g(t)\,dt$$

→ ulike valg gir samme løsning!

2. Valg av antiderivert $F(t) = \int e^{P(t)} g(t)\,dt$

Gitt antiderivert $P(t)$ har vi

$y(a) = e^{P(a)} F(a) = b$ gir at

$F(b) = b\,e^{P(a)}$, så

$$F(t) = be^{P(a)} + \int_a^t e^{P(\tau)} q(\tau)\, d\tau$$

⟶ valg er entydigt bestimt av initialbetingelser!

Dette gir <u>entydig</u> <u>løsning</u>

$$y(t) = e^{-P(t)}\left[\underbrace{be^{P(a)}}_{\text{"} = +C \text{"}} + \int_a^t e^{P(\tau)} q(\tau)\, d\tau \right]$$