Forrige forelesning

Lineære 1:a ordens diffligninger løses med integrerende faktor: $y' + py = q$, $IF = e^{P(t)}$, $P'(t) = p(t)$.

Bruk produktregeln "baklengs"! (Delvis integrasjon)

Idag: Separable ligninger (ikke-lineære!)

En separabel differensialligning har form

$$p(y)\,y' = q(t)$$

$p(y)$: bare funksjon av y; $q(t)$: bare funksjon av t

Integrere begge ledd og bruk substitusjon (kjerne-regeln)!

$\int p(y)\,y'\,dt = \int q(t)\,dt$, $u = y(t)$ gir

$\frac{du}{dt} = y' \Rightarrow \int p(y)y'\,dt = \int p(u)\,du$

La P og Q være antiderivert til p og q.

Da er $P(y) = Q(t) + C$

implicitt ligning for $y(t)$

Eksempel: $y' = 2y^2 \sin t$

Separer: $\frac{1}{y^2} y' = 2 \sin t$

$\Rightarrow \int \frac{1}{y^2} \, dy = \int 2 \sin t \, dt$

$\Rightarrow -\frac{1}{y} = -2 \cos t + c$

$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2 \cos t - C}$.

Merk: Ikke nok å gutte "+c" på slutt

"$y(t) = \frac{1}{2 \cos t} + c$" er ikke riktig!

Eksempel:
$$\begin{cases} y' = y \cos t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Ligningen er:
- første orden
- lineær
- homogen
- separabel

Vi kan bruke enten IF eller separasjon!

IF: $y' - y\cos t = 0$, $IF = e^{-\sin t}$ gir

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\sin t}\, y\right) = 0$$

$$\Rightarrow e^{-\sin t}\, y(t) = C \quad \Rightarrow \quad y(t) = Ce^{\sin t}$$

Separasjon: $\frac{1}{y}\, y' = \cos t$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int \cos t\, dt$$

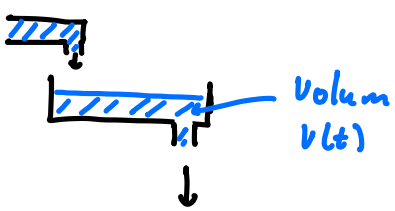
$$\ln|y| = \sin t + c$$

$$y = \underbrace{\pm e^{c}}_{=A}\, e^{\sin t} \quad \Rightarrow \quad y(t) = Ae^{\sin t}$$

Samme løsning!

Modellering med diffligninger

Eksempel: Vannkar fylles fra tom



Innstrømming: 0.2 liter/sek

Utstrømming: proporsjonal med vannmengd!

Da er: $\frac{dV}{dt} = 0.2 - kV$

inn ut

$k > 0$ proporsjonalitets konstant.

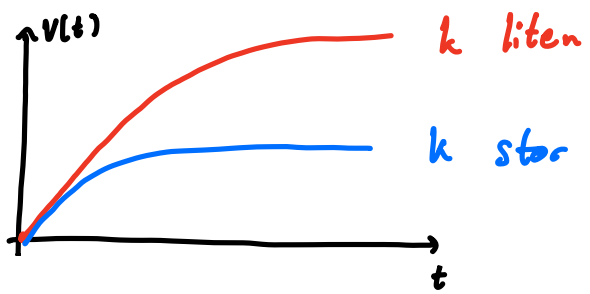
Dette gir $V' + kV = 0.2$ lineær!

$\frac{d}{dt}\left[e^{kt} V\right] = 0.2e^{kt} \Rightarrow e^{kt} V = 0.2\frac{e^{kt}}{k} + c$

$\Rightarrow V(t) = \frac{0.2}{k} + Ce^{-kt}$

$V(0) = 0 = \frac{0.2}{k} + C \Rightarrow C = -\frac{0.2}{k}$ gir

$V(t) = \frac{0.2}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$.



"Steady-state"-volum er $\lim_{t \to \infty} V(t) = \frac{0.2}{k}$.

Vekst modeller

$y' = k$ er lineær vekst: $y(t) = y_0 + kt$

$y' = ky$ er eksponentiell vekst: $y(t) = y_0 e^{at}$

$y' = ky(B-y)$ er <u>logistisk</u> vekst:

- eksponentiell vekst for små y
- vekstraten går mot null når y går mot B: "bæreevne" ("makskapasitet")

Logistisk modell er separabel:

$$\frac{y'}{y(B-y)} = k \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y(B-y)} = \int k\,dt = kt + C_1$$

For å integrere $\frac{1}{y(B-y)}$ må vi bruke delbrøks-oppspalting!

$$\frac{1}{y(B-y)} = \frac{a}{y} + \frac{b}{B-y} \Rightarrow 1 = a(B-y) + by$$
$$= aB + y(b-a)$$

gir $a = \frac{1}{B}$ og $b = \frac{1}{B}$.

Da er $\frac{1}{y(B-y)} = \frac{1}{B}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{B-y}\right)$, og

$$\int \frac{1}{y(B-y)}\,dy = \frac{1}{B}\left(\ln|y| - \ln|B-y|\right) + C_2.$$

Alt dette gir

$$\ln\left|\frac{y}{B-y}\right| = Bkt + C_3$$

Så $\left|\frac{y}{B-y}\right| = e^{Bkt+C_3} \Rightarrow \frac{y}{B-y} = C_4 e^{Bkt}$

$$\Rightarrow y\left(1 + C_4 e^{Bkt}\right) = B C_4 e^{Bkt}$$

$$\Rightarrow y = \frac{B C_4 e^{Bkt}}{1 + C_4 e^{Bkt}} = \frac{B}{1 + Ce^{-Bkt}}$$

