Andre ordens diffligninger

Ligninger med y''.

Stort tema: Vi vil bare studere <u>lineære</u> ligninger med <u>konstante</u> koeffisienter:

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (*)$$

[Sammenligne $y' = ky$, løsning $y(t) = y_0 e^{kt}$]

Vi løser ligningen (*) ved å <u>gjette</u> løsning $y(t) = e^{rt}$. Da er $y'(t) = re^{rt}$ og $y''(t) = r^2 e^{rt}$.

Dette gir $ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$

$\Rightarrow$ $ar^2 + br + c = 0$ → den karakteristiske ligningen!

(siden $e^{rt} \neq 0$)

Dette gir to løsninger r_1, r_2, gir løsninger $y_{1,2}(t) = e^{r_{1,2}t}$. <u>Tre</u> tilfeller

① Dersom r_1 og r_2 er <u>forskjellige</u> er den

generelle løsningen $y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$.

Merk: Siden ligningen er lineær og homogen vil

Summen av to skalerede løsninger være

en ny løsning: (lineær algebra: "lineærkombinasjon")

$y(t) = Ay_1 + By_2$ gir

$$ay'' + by' + cy = a(Ay_1'' + By_2'') + b(Ay_1' + By_2') + c(Ay_1 + By_2)$$

$$= A\underbrace{(ay_1'' + by_1' + cy_1)}_{=0} + B\underbrace{(ay_2'' + by_2' + cy_2)}_{=0}$$

altså $ay'' + by' + cy = 0$.

Eksempel: $y'' + 2y' - 35y = 0$

Kar. ligning $r^2 + 2r - 35 = 0$ gir $r = 1 \pm \sqrt{1+35}$

$= 1 \pm 6$

$\Rightarrow$ $r_1 = -5$ og $r_2 = 7$, generell løsning

$y(t) = Ae^{-5t} + Be^{7t}$

---

(2) Dersom karakteristiske ligningen har dobbelrot r

har vi bare en løsning på form $y_1(t) = e^{rt}$.

Her er $r = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$.

Dubbelrot betyr at $\sqrt{\dots} = 0$ og $r = -\frac{b}{2a}$.

Triks: en løsning har form $y_2(t) = te^{rt}$.

Sjekke: $y_2' = rte^{rt} + e^{rt}$ $\quad y_2'' = r^2te^{rt} + 2re^{rt}$

Da er $ay_2'' + by_2' + cy_2 = te^{rt}\underbrace{(ar^2+br+c)}_{=0} + 2are^{rt} + be^{rt}$

$= e^{rt}\underbrace{(2ar+b)}_{=0 \text{ siden } r = -\frac{b}{2a}}$

$= 0.$

Generelle løsningen er $y(t) = Ay_1(t) + By_2(t)$

$= Ae^{rt} + Bte^{rt}.$

Eksempel $\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

Merk: To initialbetingelser siden ligningen har orden 2.

Løsning: Kar. ligning $r^2 + 4r + 4 = 0$ gir

$r = -2 \pm \sqrt{4-4} = -2$ dobbelrot!

Generell løsning er

$$y(t) = Ae^{-2t} + Bte^{-2t}$$

Bruk initialbetingelser $y(0) = A \cdot 1 + B \cdot 0 = A = 1$

og $y'(t) = -2Ae^{-2t} + Be^{-2t} - 2Bte^{-2t}$

så $y'(0) = -2 + B = 1 \Rightarrow B = 3.$

Da er $y(t) = e^{-2t} + 3te^{-2t}.$

---

(3) Dersom røtterne er ikke-reelle, $r = \alpha \pm i\beta$, er den generelle løsningen fortsatt

$$y(t) = A\underbrace{e^{r_1 t}} + Be^{r_2 t}$$

kompleks eksponent

kompleks løsning

Husk Eulers identitet: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$,

gir

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}e^{i\beta t} = e^{\alpha t}\left(\cos\beta t + i\sin\beta t\right).$$

Da er

$$y(t) = Ae^{(\alpha+i\beta)t} + Be^{(\alpha-i\beta)t}$$

$$= e^{\alpha t}\left[A\cos\beta t + Ai\sin\beta t + B\cos\beta t - iB\sin\beta t\right]$$

$$= e^{\alpha t}\left[\underbrace{(A+B)}_{C}\cos\beta t + \underbrace{i(A-B)}_{D}\sin\beta t\right]$$

gir

$$y(t) = e^{\alpha t}\left[C\cos\beta t + D\sin\beta t\right].$$

reell løsning

Eksempel

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 10 = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Løsning: $r^2 - 6r + 10 = 0$

$$\Rightarrow r = 3 \pm \sqrt{9 - 10}$$

$$= 3 \pm i, \quad \text{da er} \quad \alpha = 3, \ \beta = 1 \ \text{og}$$

$$y(t) = e^{3t}(C\cos t + D\sin t).$$

$$y(0) = C = 1$$

og

$$y'(t) = 3e^{3t}(\cos t + D\sin t) + e^{3t}(-\sin t + D\cos t)$$

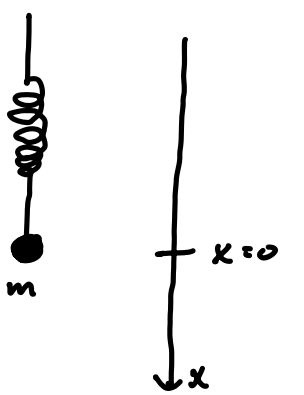
gir $y'(0) = 3 + D = 1$

$$\Rightarrow \quad D = -2 \qquad \text{så}$$

$$y(t) = e^{3t}(\cos t - 2\sin t)$$

Merk: Feil i boken (Hele sid 300)

Eksempel "Harmonic oscillator"



likevekt vid $x = 0$.

Dersom $x \neq 0$ er kraften

$F = -kx$ ("Hookes lov")

Da er $F = mx''(t)$ Newtons andre lov gir

$$mx''(t) = -kx \quad \Rightarrow \quad x'' + \frac{k}{m}x = 0.$$

Karakteristisk ligning $r^2 + \frac{k}{m} = 0$ gir $r = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,i$;

Da er $y(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ der $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$