Rekker Kapittel 10

En rekke er en uendelig lang summe av tal

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

En uendelig rekke defineres med endelige delsummer:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$

Hvis følgen $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ av delsummer konvergerer,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Sier vi at rekken konvergerer mot S, ellers sier vi at rekken divergerer.

Geometriske rekker

En rekke på form

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

der $a \neq 0$, er geometrisk.

Sammenligne kap. 1, side 32.

Teorem: Dersom $|r|<1$, konvergerer den geometriske rekken:

$$a + ar + ar^2 + \dots = \frac{a}{1-r}$$

Dersom $|r| \geq 1$ divergerer rekken.

Bevis: Dersom $r = \pm 1$ divergerer rekken!
(Siden delsummene aldri "stabiliserer")

Dersom $|r| \neq 1$ er delsummene gitt ved

$$S_n = a + ar + \dots + ar^{n-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}.$$

Nå er $\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{hvis } |r|<1 \\ \text{eksisterer ej} & \text{hvis } |r|>1. \end{cases}$ ∎

Eksempel $0.99999\dots$ er en geometrisk rekke

$$0.999\dots = 0.9 + 0.09 + 0.009 + \dots$$

La $a = 0.9$ og $r = 0.1$. Da konvergerer rekken:

$$0.999\dots = 0.9\,\frac{1}{1-0.1} = 0.9\,\frac{1}{0.9} = 1.$$

(Enda en grunn til at $0.999\dots = 1$).

Summotasjon

Vi skriver $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for rekken $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$

("Σ" er gresk bokstav "sigma").

Endelig summe $\sum_{n=1}^{N} a_n$ betyr $a_1 + a_2 + \cdots + a_N$.

Variablen n er "summasjonsindex".

Eksempel: $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots$

(geometrisk rekke).

Teorem: (Regneregler)

1) Dersom $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ og $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergerer, konvergerer

og $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)$, og $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i$.

2) Dersom $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergerer, er $\sum_{i=1}^{\infty} c a_i = C \sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Bevis: Følger fra grenselovene! ∎

For at rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ skal konvergere,

må $a_n \to 0$ da $n \to \infty$.

Teorem Hvis rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, så er $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bevis: Delsummene $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Hvis S_n konvergerer mot S, sier grenseloven at

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

Men $S_n - S_{n-1} = a_n$.

Altså er $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. ∎

De aller fleste rekker er ikke mulige å beregne analytisk. To viktige unntak:

- Geometriske rekker
- Teleskopesende rekker

Eksempel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Bruk partialbrøksoppspaltning: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$

gir $1 = a(n+1) + bn = a + n(a+b)$ gir

$a = 1$ og $b = -a = -1$, så $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Da er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots$$

$= 0$ $\quad$ $= 0$

Alle ledd utenom første kansellerer!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$