UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100 — Kalkulus (prøveeksamen)
Eksamensdag:	Lørdag 4. oktober 2025
Tid for eksamen:	10:00 – 13:30. Gj.gang 14:00 Sophus Lies aud
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling (ikke vedlagt på prøveeksamen)
Tillatte hjelpemidler:	Formelsamling.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen består av 18 oppgaver. Alle oppgavene teller like mye. Det er bare ett riktig alternativ på hver oppgave. Om du svarer galt eller lar være å svare på en oppgave, får du 0 poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Velger du mer enn ett alternativ på en oppgave, får du 0 poeng.

Oppgave 1. Det komplekse tallet $z = 2e^{i(5\pi/6)}$ kan skrives:

A) $z = 5 + 6i$
B) $z = 5 - 6i$
C) $z = 10 + 12i$
D) $z = \sqrt{3} + i$
E) $z = -\sqrt{3} + i$

Oppgave 2. Hvilket komplekst tall er en løsning av likningen $z^2+2z+2 = 0$?

A) $z = 2i$
B) $z = -2 + 2i$
C) $z = 2 - i$
D) $z = -1 - i$
E) $z = -1 + 2i$

Oppgave 3. Hvilket utsagn er sant?

A) Det fins et komplekst polynom som ikke har en kompleks rot
B) Det finnes ikke noe komplekst tall z slik at $z^4 = -\pi$
C) En kompleks tredjegradslikning har aldri tre ulike komplekse løsninger
D) $w = 2i$ er en kvadratrot av det komplekse tallet $z = -2$
E) $w = i$ er en femterot av det komplekse tallet $z = i$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4. Det komplekse tallet $4i$ kan skrives:

A) $4e^{i(3\pi/2)}$
B) $4e^{i(5\pi/2)}$
C) $4e^{i(\pi/4)}$
D) $4e^{i(5\pi/4)}$
E) $(2i)e^{5\pi/2}$

Oppgave 5. La $M \subseteq \mathbb{C}$ være mengden av komplekse tall slik at $|2-z-i| < 5$. Tolket i det komplekse planet, er M:

A) En rett linje
B) Området utenfor en sirkel
C) Området innenfor en sirkel
D) Området på den ene siden av en rett linje
E) Sirkelen med sentrum i punktet $2 - i$ og radius 5

Oppgave 6. Summen $\sum_{n=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{100} (\sqrt{j} - \sqrt{j-1}) \right)^n$ er lik:

A) 110
B) 120
C) 200
D) $\sqrt{120}$
E) $\sqrt{2000}$

Oppgave 7. Grensen $\lim_{n\to\infty} \frac{(-n)^5 - (-6)^n + \pi^n}{1 + (-10)^n}$ er:

A) -10
B) $3/5$
C) 0
D) 1
E) $+\infty$

Oppgave 8. Politiet har satt opp en radar i buskene for å måle farten til biler som kjører på en rettlinjet vei som ligger 6 meter unna radaren på det nærmeste punktet. En bil passerer, og når den er 8 meter forbi punktet på veien som er nærmest radaren, måler radaren at avstanden mellom bilen og radaren øker med 80 km/h. Hvor fort kjører bilen akkurat da?

A) 80 km/h
B) 85 km/h
C) 90 km/h
D) 95 km/h
E) 100 km/h

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 9. La $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ være følgen gitt ved $a_0 = 0$ og

$$a_{n+1} = \frac{3a_n - 12}{9}$$

for $n \geq 0$. Hvilket utsagn er sant:

A) Følgen er strengt voksende
B) Følgen er oppad begrenset av -2
C) Følgen konvergerer mot 2
D) Følgen konvergerer mot -2
E) Følgen divergerer

Oppgave 10. Hvilket utsagn er sant om grensen $\lim_{x\to\infty} \frac{x \ln x}{3^x}$?

A) Grensen er $-\infty$
B) Grensen er $+\infty$
C) Grensen er 0
D) Grensen er 1
E) Ingen av utsagnene ovenfor er sanne

Oppgave 11. La $a > 1$ være et reelt tall, og la $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ være definert ved

$$f(x) = \int_1^{ax} (t^2 - 2t)dt$$

Hva er $f(2)$?

A) $f(2) = (1/3)a^3 - a^2$
B) $f(2) = (1/3)a^6 - a^4$
C) $f(2) = (2/3)a^3 - 4a^2 + 1/3$
D) $f(2) = (1/3)a^3 - 2a^2 + 2/3$
E) $f(2) = (8/3)a^3 - 4a^2 + 2/3$

Oppgave 12. Grensen $\lim_{x\to 0^+} (2\sin x)^{3x}$ er:

A) -1
B) 0
C) 1
D) 2
E) 3

Oppgave 13. La $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = \ln((\ln x)^2)$. Hvilket utsagn er sant?

A) f er konveks på $(0, \frac{1}{e}]$ og konkav på $[\frac{1}{e}, 1)$
B) f er konveks på $(0, e/4]$ og konkav på $[4/3, 1)$
C) f er strengt voksende
D) f er voksende
E) f er begrenset

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 14. La $a \in \mathbb{R}$. For hvilken verdi av parameteren a har funksjonen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = \arctan x - ax$ et lokalt ekstremalpunkt i $x = 2$?

A) $a = 4/5$
B) $a = 3/5$
C) $a = -3/5$
D) $a = -1/5$
E) $a = 1/5$

Oppgave 15. La f være en injektiv, deriverbar funksjon med invers (omvendt) funksjon f^{-1}. Anta at $f^{-1}(7) = 2$ og $(f^{-1})'(7) = 1/3$. Hva er $f'(2)$?

A) 1
B) 2
C) 3
D) 2/3
E) 7

Oppgave 16. Hva er en korrekt definisjon av at en funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oppfyller $\lim_{x \to 3} f(x) = +\infty$?

A) For alle $A \in \mathbb{R}$ fins $\delta > 0$ slik at $|x| < \delta$ medfører $f(x) > A$
B) For alle $A \in \mathbb{R}$ og alle $\delta > 0$ gjelder at $|x| < \delta$ medfører $f(x) > A$
C) For alle $A \in \mathbb{R}$ og alle $\delta > 0$ gjelder at $|x - 3| < \delta$ medfører $f(x) > A$
D) For alle $A \in \mathbb{R}$ fins $\delta > 0$ slik at $|x - 3| < \delta$ medfører $f(x) > A$
E) For alle $\delta > 0$ fins $A \in \mathbb{R}$ slik at $|x - 3| < \delta$ medfører $f(x) > A$

Oppgave 17. Hvilken linje er en asymptote for funksjonen $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \frac{x}{10^{5/x}} \quad ?$$

A) $y = x + 1$
B) $y = x - 1$
C) $y = x + \ln 10$
D) $y = x - 5 \ln 10$
E) $y = 0$

Oppgave 18. La f være funksjonen gitt ved $f(x) = 4 + (2/x)$, med definisjonsområde $D_f = (0, \infty)$. Hvilket utsagn er korrekt?

A) Det fins ikke $\epsilon > 0$ slik at hvis $x > 2/\epsilon$, så er $|f(x) - 4| < \epsilon$
B) For alle $\epsilon > 0$ gjelder at hvis $x > 2/\epsilon$, så er $|f(x) - 4| < \epsilon$
C) For alle $\epsilon > 0$ gjelder at hvis $x > \epsilon/2$, så er $|f(x) - 4| < \epsilon$
D) Det fins ikke $\epsilon > 0$ slik at hvis $x > \epsilon/2$, så er $|f(x) - 2| < \epsilon$
E) For alle $\epsilon > 0$ gjelder at hvis $x > 2/\epsilon$, så er $|f(x) - 2| < \epsilon$

SLUTT

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag:	Mandag 6. oktober 2025
Tid for eksamen:	09:00 – 11:00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Formelsamling.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen består av 18 oppgaver. Alle oppgavene teller like mye. Det er bare ett riktig alternativ på hver oppgave. Om du svarer galt eller lar være å svare på en oppgave, får du 0 poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Velger du mer enn ett alternativ på en oppgave, får du 0 poeng.

Oppgave 1. Uttrykket $\sum_{i=0}^{2}\left(\sum_{j=1}^{3} ij\right)$ er lik:

A) 6
B) 12
C) 18
D) 24
E) 30

Oppgave 2. Det komplekse tallet $z = -1 + i$ kan skrives:

A) $z = \sqrt{2}e^{i(3\pi/4)}$
B) $z = \sqrt{2}e^{i(-\pi/4)}$
C) $z = 2e^{i(\pi/4)}$
D) $z = 2e^{i(-\pi/4)}$
E) $z = i(i-1)$

Oppgave 3. Det komplekse tallet $z = e^{i(3\pi)}$ kan skrives:

A) $z = -i$
B) $z = i$
C) $z = -(\sqrt{2})/2 + i(\sqrt{2})/2$
D) $z = -1$
E) $z = 3 + 3i$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4. Hvilket komplekst tall er en tredjerot til $z = 8e^{i(3\pi/4)}$?

A) $w = 2e^{i(\pi/4)}$
B) $w = \sqrt{8}e^{i(3\pi/8)}$
C) $w = (8/3)e^{i(\pi/4)}$
D) $w = 1 + i$
E) $w = 2i$

Oppgave 5. Hvilket utsagn er sant?

A) Et komplekst tredjegradspolynom har alltid minst én reell rot
B) Et komplekst fjerdegradspolynom har alltid minst én reell rot
C) En kompleks andregradslikning har alltid to ulike komplekse løsninger
D) Alle komplekse polynomer kan skrives som produkter av reelle polynomer
E) Ingen komplekse tall z oppfyller likningen $z\overline{z} + 1 = 0$

Oppgave 6. La $M \subseteq \mathbb{C}$ være mengden av alle komplekse tall z som oppfyller betingelsen $|z + 5i + 7| > 3$. Tolket i det komplekse planet, er M:

A) Et rektangulært område
B) En sirkel
C) En rett linje
D) Området innenfor en sirkel
E) Området utenfor en sirkel

Oppgave 7. Grensen $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n + 5 \cdot (-7)^{n+2}}{(-8)^n + 20n}$ er:

A) 49/8
B) 0
C) −7/20
D) $+\infty$
E) 7/8

Oppgave 8. La følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være gitt ved

$$a_n = \frac{6n + 5}{2n}$$

Hvilket utsagn er sant?

A) For alle naturlige tall N fins $\epsilon > 0$ slik at hvis $|a_n - 3| < \epsilon$, så er $n < N$.
B) For alle naturlige tall N fins $\epsilon > 0$ slik at hvis $|a_n - 3| > \epsilon$, så er $n > N$.
C) For alle tall $\epsilon > 0$ gjelder at hvis $n > 5/(2\epsilon)$, så er $|a_n - 3| < \epsilon$.
D) For alle tall $\epsilon > 0$ gjelder at hvis $n > 6 + 1/(5\epsilon)$, så er $|a_n - 3| < \epsilon$.
E) Ingen av utsagnene A)–D) er sanne.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 9. Grensen $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x\cos 3x}$ er:

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) $+\infty$

Oppgave 10. Hvilken linje er en asymptote for funksjonen $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x \cdot 2^{1/x}$?

A) $y = 1$
B) $x = 1$
C) $y = x$
D) $y = x + 1$
E) $y = x + \ln 2$

Oppgave 11. Grensen $\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^x$ er:

A) 0
B) 1
C) e
D) $-\infty$
E) $+\infty$

Oppgave 12. La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en strengt voksende og deriverbar funksjon som oppfyller $f'(4) = 1/3$ og $f(4) = 1$. Hva er $(f^{-1})'(1)$?

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

Oppgave 13. La følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være gitt ved $a_1 = 0$ og $a_{n+1} = \frac{10+2a_n}{7}$ for alle $n \geq 1$. Hvilket utsagn er sant?

A) Følgen divergerer
B) Følgen er oppad begrenset av 1
C) Følgen konvergerer mot 2
D) Følgen konvergerer mot 7
E) Følgen konvergerer mot 10

Oppgave 14. La $f : [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x\right)$. Hvilket utsagn er sant?

A) f er strengt voksende
B) f er strengt avtakende
C) $x = \pi/2$ er en vertikal asymptote for f
D) $y = \pi/2$ er en horisontal asymptote for f
E) $f'(x) = 0$ for alle $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 15. La $L = \lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{3}{1+x^2}\,dx$.
Hvilket utsagn er sant?

A) Grensen L eksisterer ikke
B) $L = 1$
C) $L = \pi/2$
D) $L = \pi$
E) $L = \frac{3\pi}{2}$

Oppgave 16. Et fly holder konstant høyde 8 km og flyr i rett linje over en radarstasjon på bakken. Hvis $x = x(t)$ er flyets horisontale avstand fra radarstasjonen og $y = y(t)$ er avstanden i luftlinje fra radaren til flyet målt i km, der tiden t måles i timer (h), har vi altså $x^2 + 8^2 = y^2$. På et tidspunkt er $x = 6$ (km), og radaren måler at avstanden y til flyet akkurat da øker med fart 540 km per time. Hva er flyets fart på dette tidspunktet?

A) 600 km/h
B) 700 km/h
C) 800 km/h
D) 900 km/h
E) 1000 km/h

Oppgave 17. La a være en reell konstant, og la $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = (x + a)e^{-x}$. Hvilken verdi av a gjør at f er konkav på $(-\infty, 3]$ og konveks på $[3, \infty)$?

A) $a = -2$
B) $a = -1$
C) $a = 0$
D) $a = 1$
E) $a = 2$

Oppgave 18. Hvilket utsagn er en korrekt definisjon av at en funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oppfyller $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5$?

A) For alle $\epsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at $|x| > \delta$ medfører $|f(x) - 5| < \epsilon$
B) For alle $\epsilon > 0$ fins $b \in \mathbf{R}$ slik at $x < b$ medfører $|f(x) - 5| < \epsilon$
C) For alle $\epsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at $|x| < \delta$ medfører $|f(x) - 5| < \epsilon$
D) Det eksisterer $\epsilon > 0$ og $\delta > 0$ slik at $x < \delta$ medfører $|f(x) - 5| < \epsilon$
E) For alle $\epsilon > 0$ og $\delta > 0$ har vi at $x > \delta$ medfører $|f(x) - 5| < \epsilon$

SLUTT