Oppgaver til uke 35 (ved Arne Hole)

Eksamensoppgaver

Se lenker under Ressurser/Gamle eksamensoppgaver på Emnesiden.

- MAT-INF1100 høst 22 del 2 oppgave 1
- MAT-INF1100 høst 23 del 2 oppgave 1

Om mengder

Oppgave 1.
La $A = \{3, 4, 5\}$ og $B = \{3, 5\}$. Hvilke utsagn er sanne?

(a) $3 \in B$

(b) $4, 5 \in A$

(c) $2 \in A$

(d) $B \subseteq A$

(e) $A \subseteq B$

(f) $7 \notin A$

(g) $\emptyset \subseteq A$

(h) $A \subseteq A$

(i) $\emptyset \in A$

Oppgave 2.
La $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Finn mengdene:

(a) $\{x + 7 \mid x \in M\}$

(b) $\{x \in M \mid x \neq 2 \text{ og } x \neq 5\}$

Oppgave 3.
La $R = \{1, 3, 5, 7\}$ og $S = \{3, 5, 7, 9\}$.

Finn $R \cap S$, $R \cup S$, $R \setminus S$ og $S \setminus R$.

Reelle tall

Oppgave 4.
Skriv følgende mengder som intervaller:

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 10\}$

Oppgave 5.
La $U = [3, 7) \cup (9, 12)$.

Vis at U er begrenset og finn $\inf U$ og $\sup U$.

Oppgave 6.
Regn ut følgende talluttrykk for hånd, uten å bruke kalkulator.

(a) $4^2 + (-2)^4 + (-1)^9 + 3^0 + 5 \cdot 4^{-2}$

(b) $x^2t + 5t + t^2(4 - x)$, der $x = \frac{1}{3}$ og $t = \frac{1}{2}$.

Algebraiske manipulasjoner

Oppgave 7.
Forenkle følgende formeluttrykk så mye du kan. Alle bokstaver står for tall.

(a) $\dfrac{x^4 - x^3}{2x + x^2}$

(b) $\dfrac{x^3 + 5x^2}{x^3 + 2x}$

(c) $\dfrac{x^5y - xy^2}{xy}$

(d) $\dfrac{x^2 + x}{x + 1}$

(e) $\dfrac{x + 2}{x^2} - \dfrac{x}{x^3}$

(f) $x \cdot \dfrac{5x - 8}{x^2}$

(g) $1 - \dfrac{x - 1}{x}$

(h) $\dfrac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a-b}}$

Oppgave 8.
Forenkle følgende talluttrykk så mye du kan. Alle bokstaver står for reelle tall.

(a) $\dfrac{x^3 + x^2 y}{x + x^2}$

(b) $\dfrac{x^2 y^3 + y^4 x}{x y^3 + y^4}$

(c) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}$

(d) $\dfrac{xy + 1 + xy^2}{x}$

(e) $\dfrac{yx - x}{y - 1}$

(f) $\dfrac{rare}{greier}$

(g) $\left[3 - \dfrac{5x^2tz + x^2tz}{tx^2z}\right]^3$

(h) $\dfrac{\text{Dette} - \text{er} - \text{egentlig}}{\text{bare} - \text{sludder}}$

Oppgave 9.
Forenkle følgende uttrykk mest mulig:

(a) $\dfrac{2x(x^2-1) + x^3y^4 + 2x}{2x^2 + x^2y^4}$

(b) $\dfrac{x^4/(x^4+1)}{1/(x^4+1)}$

(c) $\left[\dfrac{xk^{5+t}}{k^5(x-1)k^t} - \dfrac{1}{x-1}\right]^{-1}$

(d) $((2^{-1})^{-4})^{-8}$

Oppgave 10.
Skriv om ved å gange sammen parentesene:

(a) $(x+5)(x+3)$

(b) $(x^2-5)(2x+3)$

(c) $(y+3)(y-3)$

(d) $(x+1)(x+2)(x-1)$

Oppgave 11.
Her er et triks du kan imponere dine venner med: Tenk på et tall mellom 1 og 15. Gang det med to, og legg til 8. Del så på 2, og trekk fra tallet du

tenkte på. Med en synsk mine kan vi nå si at tallet du har som svar, er 4. Hvorfor blir det alltid slik? Undersøk ved å kalle tallet man tenker på x. Hva blir svaret, uttrykt ved x?

Oppgave 12.
Hvilke av følgende utsagn er sanne?

(a) $x^2 > 0 \Rightarrow x > 0$

(b) $x = 2 \Rightarrow x^4 = 16$

(c) $x^4 = 16 \Rightarrow x = 2$

(d) $x^4 = 16 \iff x = 2$

(e) $x^4 = 16 \iff x = 2$ eller $x = -2$

(f) $x^2 + y^2 = 0 \iff x = 0$ og $y = 0$

Rasjonale tall

Oppgave 13.
Skriv følgende desimaltall på formen n/m, der n og m er hele tall.

(a) 4.1212121212...

(b) $-78.001234123412341234...$

Oppgave 14.
Vis at hvis a er et rasjonalt tall og b er et irrasjonalt tall, så er $a+b$ og $a-b$ irrasjonale tall.

Oppgave 15.
Vis at hvis $a \neq 0$ er et rasjonalt tall og $b \neq 0$ er et irrasjonalt tall, så er ab, a/b og b/a irrasjonale tall.

Oppgave 16.
Forenkle uttrykket $\sqrt{(a/b)} - \sqrt{a}(\sqrt{b})^{-1}$.

Oppgave 17.
I denne oppgaven skal vi vise at $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall. Anta det omvendte, dvs. at vi kan skrive $\sqrt{2} = n/m$ der n og m er hele tall. Ved kvadrering kan dette skrives

$$2 = \frac{n^2}{m^2}. \tag{1}$$

(a) Vis at n må være et partall. (Hint: Produktet av to oddetall er et

oddetall.)

(b) Vi kan nå skrive $n = 2k$, der k er et helt tall. Bruk dette til å vise at også m er et partall.

(c) Begrunn at $\sqrt{2}$ må være irrasjonalt.

Polynomdivisjon

Oppgave 18.
Utfør polynomdivisjonene

(a) $(x^3 - 3x^2 + 2x - 6) : (x - 3)$

(b) $(x^3 + 1) : (x + 1)$

(c) $(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x) : (x^2 + 2x)$

Oppgave 19.
Regn ut

$$(x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 9x + 4) : (x + 4) \tag{2}$$

og bruk resultatet til å skrive polynomet

$$x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 9x + 4 \tag{3}$$

som et produkt av to polynomer, hvorav $x + 4$ er det ene.

Oppgave 20.
Finn et polynom P slik at

$$P : (x^2 + 3) = x^3 + x^2 + x + 1 \tag{4}$$

Oppgave 21.
Avgjør om polynomdivisjonene nedenfor går opp eller ei. Angi svaret i de tilfellene divisjonen går opp. Hvis divisjonen ikke går opp, så angi konklusjonen med en rest.

(a) $(x^2 - 2x + 1) : (x + 1)$

(b) $(x^2 - 2x - 3) : (x + 1)$

(c) $(x^7 + x^6 - 1) : (x + 1)$

(d) $(2x^3 + 4x) : (x^2 + 1)$

Oppgave 22.
Løs følgende ligninger med hensyn på x.

(a) $x^2 + (1-t)x = t$

(b) $t + \dfrac{a}{kx+t} = 0$

(c) $5x^{-2} + 4x^{-1} = 1$

(d) $x = \sqrt{x-1} + 7$

Oppgave 23.
Løs ligningen

$$x^3 - 21x + 20 = 0. \tag{5}$$

Følger

Oppgave 24.
La $a_0 = 20$, og la

$$a_{n+1} = 5 + \frac{1}{2}a_n, \tag{6}$$

for $n \geq 0$. Vis at vi har $a_n > 10$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Oppgave 25.
Vis at for alle naturlige tall $n \geq 1$ er

(a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(b) $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2$

(c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$

Oppgave 26.
Regn ut følgende summer:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{6} 4n^2$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} 1$

(c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{4} (5j^2 - 2)$

(d) $\displaystyle\sum_{p=-1}^{0} 2p$

Oppgave 27.
Skriv uttrykket

$$4^3 + 4^4 + 4^5 + 4^6 \tag{7}$$

ved bruk av summetegn.

Kombinatorikk

Oppgave 28.
Du skal sette sammen et antrekk bestående av en genser, et skjerf, en lue og en bukse. Du kan velge blant 2 gensere, 3 skjerf, 2 luer og 7 bukser. Hvor mange kombinasjonsmuligheter har du?

Oppgave 29.
På hvor mange måter kan 4 mennesker stille seg i kø etter hverandre?

Oppgave 30.
Hvor mange *ord* kan du lage av bokstavene ABCDEF?
(Ordene behøver ikke bety noe.)

Oppgave 31.
I Vikinglotto plukker man ut 6 av 48 tall. Rekkefølgen tallene trekkes ut i, spiller ingen rolle. Hvor mange ulike Vikinglotto-rekker fins det?

Oppgave 32.
En familie består av bestemor, far, mor og de fire ungene Lars, Hanne, Ellen og Merete. De spiser hver dag middag sammen ved stuebordet, som har 7 plasser. Imidlertid liker de å finne en ny rekkefølge å sitte i hver dag. Vis at familien kan spise middag i mer enn 13 år uten noen gang å sitte i en plasskombinasjon de har brukt før!

Oppgave 33.
Skriv opp Pascals trekant ned til tiende linje. Bruk resultatet til å skrive ut $(a+b)^8$.

Oppgave 34.
Bruk binomialformelen til å finne koeffisienten foran a^7b^{21} i uttrykket for $(a+b)^{28}$.

Avsluttende morsomheter

Oppgave 35.
I uttrykket nedenfor står alle variabler for reelle tall. Ivar tipper at uttrykket kan forenkles til ti eller hundre, mens Ravi tror at svaret vil innholde variabler. Avgjør hvem som har rett ved å forenkle uttrykket.

$$\frac{1}{121}\sqrt{\frac{t^4}{625}} \cdot \frac{t^2+3t-10}{(t^2-2t)(t+5)} \sum_{j=1}^{10} \left(\sum_{k=1}^{10} ijk \right)$$

Oppgave 36.
Ekstraoppgave (ikke pensum): *Det fins så mange reelle tall at de ikke en gang får plass på en uendelig lang liste!* Dette er et eksempel på at det finnes uendeligheter av ulik størrelse, et helt nytt matematisk fenomen da Georg Cantor oppdaget det på 1870-tallet. I denne oppgaven forklares argumentet hans, kalt diagonal argumentet.

En uendelig mengde kalles *tellbar* hvis det er mulig å lage en uendelig lang liste over alle elementene i mengden, altså liste dem opp som element nr. 1, element nr. 2 og så videre. Kroneksemplet på en tellbar mengde er selvsagt mengden $\mathbb{N}$ av naturlige tall, for den kan listes opp slik: $0, 1, 2, 3, \ldots$. Mengden $\mathbb{Z}$ av hele tall er også tellbar, for ved å veksle mellom positive og negative tall kan vi lage følgende liste:

- Element nr. 1: 0
- Element nr. 2: 1
- Element nr. 3: -1
- Element nr. 4: 2
- Element nr. 5: -2
- Element nr. 6: 3
- Element nr. 7: -3
- Element nr. 8: 4
- Element nr. 9: -4
- (og så videre)

Her vil ethvert helt tall komme med, så alle elementene i mengden $\mathbb{Z}$ er på denne uendelig lange listen. Mer overraskende er det kanskje at også mengden $\mathbb{Q}$ av alle rasjonale tall er tellbar. Dette kan vi vise ved å lage en liste der vi lister opp (maksimal forkortede) brøker med heltallig teller og nevner systematisk i grupper der summen av absoluttverdiene til teller og nevner er 1, 2, 3 osv., og der vi dessuten veksler fortegn. Listen kan se slik ut:

- Element nr. 1 (sum 1): $\frac{0}{1}$
- Element nr. 2 (sum 2): $\frac{1}{1}$
- Element nr. 3 (sum 2): $-\frac{1}{1}$
- Element nr. 4 (sum 3): $\frac{1}{2}$
- Element nr. 5 (sum 3): $-\frac{1}{2}$
- Element nr. 6 (sum 3): $\frac{2}{1}$
- Element nr. 7 (sum 3): $-\frac{2}{1}$
- Element nr. 8 (sum 4): $\frac{1}{3}$
- Element nr. 9 (sum 4): $-\frac{1}{3}$
- Element nr. 10 (sum 4): $\frac{3}{1}$
- Element nr. 11 (sum 4): $-\frac{3}{1}$
- Element nr. 12 (sum 5): $\frac{1}{4}$
- Element nr. 13 (sum 5): $-\frac{1}{4}$
- Element nr. 14 (sum 5): $\frac{2}{3}$
- Element nr. 15 (sum 5): $-\frac{2}{3}$
- Element nr. 16 (sum 5): $\frac{3}{2}$
- Element nr. 17 (sum 5): $-\frac{3}{2}$
- Element nr. 18 (sum 5): $\frac{4}{1}$
- Element nr. 19 (sum 5): $-\frac{4}{1}$
- Element nr. 20 (sum 6): $\frac{1}{5}$

- Element nr. 21 (sum 6): $-\frac{1}{5}$
- (og så videre)

Her vil enhver maksimalt forkortet brøk før eller siden dukke opp. For eksempel vil $\frac{17}{231}$ dukke opp i gruppen for brøker med sum $17 + 231 = 248$.

Hva så med mengden $\mathbb{R}$ av alle reelle tall? Anta at det fins en uendelig lang liste over alle slike tall. Den kan for eksempel starte slik:

- Element nr. 1: 13.478833333...
- Element nr. 2: $-2.828473829347...$
- Element nr. 3: 0.000037284...
- Element nr. 4: 0.788888888...
- Element nr. 5: 17.00000000...
- Element nr. 6: 36.675397402...
- Element nr. 7: 2.7182818284...
- (og så videre)

Gitt en slik liste kan vi konstruere et reellt tall d som *ikke* står på listen, på følgende måte. Vi velger for enkelthets skyld heltalldelen til d lik 0. Så lar vi desimal nummer n i tallet d til å være ett hakk høyere enn desimal nummer n på element nr. n i listen, bortsett fra at vi lar 9 bli til 1. Med listen ovenfor vil tallet d starte slik:

$$d = 0.5319189...$$

(a) Forklar hvorfor d ikke står noe sted på listen!
Resultatet ovenfor viser at spranget fra $\mathbb{Q}$ til $\mathbb{R}$ på en fundamental måte er *større* enn sprangene fra $\mathbb{N}$ til $\mathbb{Z}$ og fra $\mathbb{Z}$ til $\mathbb{Q}$. Man sier at mengden $\mathbb{R}$ har et høyere *transfinit kardinaltall* enn mengdene $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$, som alle er tellbare og dermed har samme transfinite kardinaltall.

(b) Bruk resultatet ovenfor til å vise at mengden $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ av alle *irrasjonale tall* heller ikke er tellbar. (Hint: Hvis den var tellbar, kunne du laget en liste over alle reelle tall ved å kombinere med en liste for $\mathbb{Q}$.

(c) Forklar i hvilken forstand det gir mening å si at "de fleste" reelle tall er irrasjonale.