Oppgaver til uke 37 (ved Arne Hole)

Oppgaver om trigonometri overført fra forrige uke

Komplekse tall

Oppgave 1.
Eksamensoppgaver:

- Midtveis eksamen høst 24 oppgave 1, 2, 3, 4, 5
- Avsluttende eksamen høst 24 oppgave 1
- Avsluttende eksamen høst 19 oppgave 7
- Avsluttende eksamen høst 20 oppgave 5

Oppgave 2.
Tegn opp det komplekse planet, og plasser følgende komplekse tall på figuren:

- $3+2i, \quad -2+5i, \quad -1+(-2)i$
- $2+(-1)i, \; 4i, \quad -3$
- $0, \quad 5, \quad (-3)i$

Oppgave 3.
Betrakt de komplekse tallene $z = -1 + i$ og $w = -1 - i$.
(a) Vis ved figur hvor i det komplekse planet z og w ligger.

(b) Finn absoluttverdiene $|z|$ og $|w|$.

(c) Finn argumentene $\theta \in [0, 2\pi)$ til z og w.

(d) Skriv z og w på polar form.

Oppgave 4.
Betrakt det komplekse tallet $z = 2e^{i(4\pi/3)}$.
(a) Tegn en figur som viser hvor i det komplekse planet z ligger.

(b) Finn realdelen $\mathfrak{Re}\, z$ og imaginærdelen $\mathfrak{Im}\, z$. Skriv z på rektangulær form $z = a + bi$.

Oppgave 5.
Tegn en figur som illustrerer hvor disse tallene ligger i det komplekse planet:

- $e^{i(\pi/4)}$, $e^{i(\pi/3)}$, $e^{i(2\pi/3)}$
- $e^{i\pi}$, $\frac{1}{2}e^{i(3\pi/2)}$, $2e^{i(\pi/3)}$

Skriv så hvert tall på den rektangulære formen $a + bi$.

Oppgave 6.
Regn ut $z + w$ og zw når $z = 2 + 4i$ og $w = 7 - 3i$.

Oppgave 7.
Skriv tallene $2e^{i(-\pi/3)}$ og $5e^{i\cdot 1}$ på rektangulær form $a + bi$.

Oppgave 8.
Skriv tallene $-2 + (-2)i$ og $3 + 4i$ på polar form $re^{i\theta}$.

Oppgave 9.
Forklar hvorfor $3e^{i(\pi/7)} = 3e^{i(15\pi/7)}$.

Oppgave 10.
Regn ut og skriv svaret på formen $a + bi$:
(a) $(1 + i) + (5 - 3i)$

(b) $(-1 - i) - (2 + 3i)$

(c) $(2 + 3i) - 1$

(d) $4i + (4i + 3)$

(e) $(4 + 2i)(2 + 2i)$

(f) $(-1 + 3i)(1 - i)$

(g) $(1 + i)(1 - i)$

(h) $(-2 + 7i)(-1 + 3i)$

(i) $\dfrac{3 + 4i}{2 + 4i}$

(j) $\dfrac{-1 - i}{1 - i}$

(k) $(4 - 3i)^{-1}$

(l) $\dfrac{5}{i}$

(m) $(1 + i)^3$

(n) i^5

(o) $i(i - 1)$

(p) $\dfrac{1}{(3 + 4i)^2}$

(q) $(3+i-7)i^3$

Oppgave 11.
I denne oppgaven skal vi se nærmere på konjugasjon av komplekse tall.
(a) Regn ut $\overline{4+3i}$ og $\overline{-2-2i}$.

(b) Tegn inn tallene $4-3i$ og $-2-2i$ samt deres konjugerte i det komplekse plan. Hva skjer rent geometrisk med et komplekst tall når vi konjugerer det?

(c) Bruk den geometriske tolkningen fra (b) til å finne $\overline{z}$ når $z = re^{i\theta}$.

Oppgave 12.
Vis at $w = 2+3i$ er en kvadratrot til tallet $z = -5+12i$.
Finn også den andre kvadratroten.

Oppgave 13.
Regn ut og skriv svaret på rektangulær form:
(a) $\sqrt{-9}$

(b) $\sqrt{-1}$

(c) $\sqrt{-16}$

(d) $\sqrt{-(1/4)}$

(e) $\sqrt{i}$

(f) $\sqrt{2+2i}$

Oppgave 14.
Finn tredjerøttene til følgende komplekse tall. Det holder at du skriver svarene på polar form. Skisser i hvert tilfelle hvordan røttene ligger i det komplekse planet.
(a) $z = 1+i$

(b) $z = -8$

(c) $z = i$

Oppgave 15.
Finn fjerderøttene til $z = 1$.

Oppgave 16.
Finn alle komplekse løsninger av ligningen $(3i+2)z^3 = 2i-3$

Oppgave 17.
Finn alle komplekse tall z slik at $z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = 0$ Hint: Gjett på en løsning, og bruk så polynomdivisjon.

Oppgave 18.
La p og q være reelle tall. Finn alle komplekse løsninger av ligningen $z^2 - 2pz + (p^2 + q^2) = 0$

Oppgave 19.
Finn alle komplekse løsninger x av følgende ligninger:
(a) $x^2 - 10x + 34 = 0$

(b) $2x^2 + 8 = 0$

(c) $x^2 + 2x + 50 = 0$

(d) $x^2 - 6x + 10 = 0$

(e) $x^2 - 6x - 27 = 0$

(f) $x^2 + 14x + 53 = 0$

Oppgave 20.
Finn alle komplekse løsninger z av følgende ligninger:
(a) $z^2 + z + 1 = 0$

(b) $2z^2 + 2iz - 5 = 0$

(c) $z^4 + 4z^3 + 8z^2 = 0$

(d) $z^8 = 1$

Oppgave 21.
Finn alle komplekse tall z som er løsninger av andregradsligningen $z^2 + (4 + 4i)z + 4i = 0$.

Oppgave 22.
Vis at $e^{i\pi} + 1 = 0$.
Dette kalles *Eulers formel*.

Oppgave 23.
Vis at $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ for hele tall n.
Dette kalles *De Moivres formel*. Hvis man så bruker binomialformelen på venstre side kan man utlede interessante identiteter for både $\cos(n\theta)$ og $\sin(n\theta)$.