Oppgaver til uke 39 (ved Arne Hole)

Oppgave 1.
Eksamensoppgaver

- Midtveis eksamen høst 24 oppgave 9 og 10

Oppgave 2.
I denne oppgaven er meningen at du skal finne grensene ved å resonnere intuitivt. Du trenger ikke bruke de formelle definisjonene. Betrakt funksjonen f definert ved $f(x) = 1/x$ for $x \neq 0$.
(a) Finn $f(0.1)$ og $f(0.001)$. Finn:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x). \tag{1}$$

(b) Regn ut $f(10)$ og $f(100)$. Finn:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x). \tag{2}$$

(c) Finn ved tilsvarende eksperimenter:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \quad \text{og} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x). \tag{3}$$

(d) Skisser grafen til f.

Oppgave 3.
Bruk de formelle definisjonene av grense til å vise følgende.
(a) $\lim_{x \to 0} 4x = 0$.
(b) $\lim_{x \to 2} 3x = 6$.
(c) $\lim_{x \to 2}(5x - 1) = 9$.
(d) $\lim_{x \to 4} x^2 = 16$.

Oppgave 4.
Bruk den formelle definisjonen av grense til å vise at

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty. \tag{4}$$

Oppgave 5.
I denne oppgaven skal vi bruke den formelle definisjonen av

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty. \tag{5}$$

(a) Finn x slik at $\sqrt{x-2} = 100$.

(b) Gitt et tall $B > 0$, finn et tall x slik at $\sqrt{x-2} = B$.

(c) Gitt et tall $B > 0$, finn A slik at hvis $x > A$, så er $\sqrt{x-2} > B$.

(d) Vis at $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-2} = +\infty$.

Oppgave 6.
Finn grenseverdiene

(a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{3+x^3}{x-3}$

(b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{10x^2+x+1}{2x^2+4}$

(c) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$

(d) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+5}{10x^2+2x}$

(e) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x}$

(f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3+2x^2+5x}{x^2+x}$

(g) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x}{1-x}$

(h) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{x}{1-x}$

Oppgave 7.
La f være definert ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{for } x \geq 1 \\ 4x - x^3 - 2 & \text{for } x < 1 \end{cases} \tag{6}$$

(a) Finn $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ og $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

(b) Er f kontinuerlig i $x = 1$? Begrunn svaret.

Oppgave 8.
Finn eventuelle horisontale og vertikale asymptoter til funksjonen, og skisser grafen.

(a) $f(x) = \dfrac{3x}{x-5}$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{|x|}$

Oppgave 9.
Angi de største definisjonsmengdene $D_f \subseteq \mathbb{R}$ som hvert av funksjonsuttrykkene i oppgave 6 er kontinuerlige på.

Oppgave 10.
Finn grenseverdiene

(a) $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{kt^2 - x_0}{(m_0^2 t^2 + 1)^3}$

(b) $\lim\limits_{u \to \infty} \dfrac{t^2 u^2 - 2tu}{v^2 - u^2}$

Oppgave 11.
Vis at ligningen $x^5 + x^4 + x^3 + x - 1 = 0$ har en løsning x som ligger i intervallet $[-1, 1]$.

Oppgave 12.
Vis at funksjonen $f(x) = x^{-2} + x^{-3} - x^{-4}$ har et globalt maksimumspunkt på intervallet $[1, 2]$.

Oppgave 13.
Vis at alle polynomfunksjoner av odde grad har minst ett nullpunkt.

Oppgave 14.
Finn et eksempel på en funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er injektiv, men ikke strengt monoton.