Løsninger til oppgaver til uke 39 (ved Arne Hole)

Oppgave 1:

- Midtveis eksamen høst 24 oppgave 9 og 10

Oppgave 2:

(a) $f(0.1) = 10$, $f(0.001) = 1000$,
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

(b) $f(10) = 0.1$, $f(100) = 0.01$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(c) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Oppgave 3:

Oppgave 4:

Oppgave 5:

(a) $x = 10002$.

(b) $x = B^2 + 2$.

(c) $A = B^2 + 2$.

Oppgave 6:

(a) -11

(b) 5

(c) -1

(d) $-\infty$

(e) 1

(f) 5

(g) $-\infty$

(h) ∞

Oppgave 7:

(a) Begge grensene er 1.

(b) Ja.

Oppgave 8:

(a) Vertikal asymptote $x = 5$, horisontal asymptote $y = 3$.

(b) Vertikal asymptote $x = 0$, horisontal asymptote $y = 0$.

Oppgave 9:

a) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$
b) $\mathbb{R}$
c) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
d) $\mathbb{R} \setminus \{0, -\frac{1}{5}\}$
e) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
f) $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$
g) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
h) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Oppgave 10:

(a) $(k - x_0)/(m_0^2 + 1)^3$

(b) $-t^2$

Oppgave 11:

Funksjonen $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x - 1$ er kontinuerlig på $[-1, 1]$, og vi har $f(-1) = -1 + 1 - 1 - 1 - 1 = -3 < 0$, $f(1) = 1 + 1 + 1 + 1 - 1 = 3 > 0$. Ved skjæringssetningen følger at f har et nullpunkt x i intervallet $(-1, 1)$, og dette blir da en løsning av den oppgitte ligningen.

Oppgave 12:

Merk: Her menes det at $D_f = [1, 2]$. Resultatet følger da fra ekstremalverdisetningen, fordi f er kontinuerlig på intervallet $[1, 2]$.

Oppgave 13:

For en polynomfunksjon med grad større enn 0 har vi alltid

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \pm\infty \quad \text{og} \quad \lim_{x \to -\infty} P(x) = \pm\infty. \tag{1}$$

Grunnen er at leddet med høyest eksponent dominerer.

Hvis graden er et oddetall, er grensen når $x \to +\infty$ lik $+\infty$ hvis og bare hvis grensen når $x \to -\infty$ er $-\infty$. Dette gjør at for en polynomfunksjon $P(x)$ av odde grad vil det alltid finnes punkter $a, b \in \mathbb{R}$ slik at $P(a) < 0$ og $P(b) > 0$.

Siden $P(x)$ er kontinuerlig på det lukkede intervallet mellom a og b, følger det ved skjæringssetningen at $P(x)$ har et nullpunkt mellom a og b.

Oppgave 14:

For eksempel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x$ hvis x er et rasjonalt tall, og $f(x) = x+1$ hvis x er et irrasjonalt tall. Den er ikke monoton på noe intervall (med lengde > 0).

Et annet eksempel er f definert ved $f(x) = 1/x$ for $x \neq 0$ og $f(0) = 0$.