Oppgaver til uke 40 (ved Arne Hole)

Oppgave 1.
Deriver funksjonene under.
(a) $f(x) = x^{89}$

(b) $f(x) = 2 + 5x$

(c) $f(x) = 5 + \dfrac{5}{x^2}$

(d) $f(x) = x^3 + x^{-2}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 1}$

(f) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

Oppgave 2.
Bruk produktregelen til å finne $f'(x)$ når
(a) $f(x) = (x^2 + x + 1)(1 + x^3 + x^6)$

(b) $f(x) = (x^7 - x^{-1})(x^7 + x^3 + 2)$

(c) $f(x) = e^x \sin x$

(d) $f(x) = xe^x \sin x$

Oppgave 3.
Finn den deriverte av følgende funksjoner:
(a) $f(x) = \sin(2x^2)$

(b) $f(x) = (\cos x)^{10}$

(c) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

(d) $f(x) = \sin x \cos x$

Oppgave 4.
Deriver følgende funksjoner:
(a) $f(x) = (\ln |x|)^3$

(b) $f(x) = (x + 1)(x + 2)^{12} + \dfrac{2}{x}$

(c) $f(x) = x(x^2 + 1)^9$

(d) $g(x) = \dfrac{x^8 - 2}{x^2 + x^3} + \dfrac{1}{x + x^4}$

(e) $h(x) = \left((x^2+1)^{11} + x^4\right)^8$

Oppgave 5.
Deriver funksjonene gitt ved:
(a) $f(x) = \arcsin \dfrac{1}{x}$

(b) $f(x) = \arctan(x^2)$

Oppgave 6.
La $f(x) = 7x + 13$. Bruk definisjonen av den deriverte til å vise at $f'(x) = 7$

Oppgave 7.
Bruk definisjonen av den deriverte til å derivere funksjonen $f(x) = x^3$.

Oppgave 8.
Deriver følgende funksjoner:
(a) $f(x) = e^{5x}$

(b) $f(x) = \ln(x^4 + x^2)$

(c) $f(x) = e^{x^2+2x}$

(d) $f(x) = 10^x$

(e) $f(x) = \log_5 x$

(f) $f(x) = e^x \ln \dfrac{x+1}{x^2+1}$

Oppgave 9.
Deriver funksjonene gitt ved
(a) $f(x) = x(\cot x)^{-1}$

(b) $f(x) = \tan(x^2)$

Oppgave 10.
Vis at produktregelen kan utvides til å gjelde for tre faktorer $u(x)$, $v(x)$ og $w(x)$ med formelen

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

Oppgave 11.
Forklar hvordan produktregelen for derivasjon ser ut for tilfellet n faktorer,

der $n \geq 2$ er et vilkårlig heltall. Bruk dette til å forklare hvorfor derivasjonsregelen $(x^n)' = nx^{n-1}$ for hele tall $n \geq 2$ kan utledes slik:

$$
\begin{aligned}
(x^n)' &= (x \cdot x \cdot x \cdots x \cdot x)' && (1)\\
&= 1 \cdot x \cdot x \cdots x \cdot x && (2)\\
&+ x \cdot 1 \cdot x \cdots x \cdot x && (3)\\
&+ x \cdot x \cdot 1 \cdots x \cdot x && (4)\\
&\quad \vdots && (5)\\
&+ x \cdot x \cdot x \cdots 1 \cdot x && (6)\\
&+ x \cdot x \cdot x \cdots x \cdot 1 = nx^{n-1} && (7)
\end{aligned}
$$

Oppgave 12.
Utfør derivasjonene under. Husk at bokstaver som det ikke deriveres med hensyn på, skal behandles som konstante tall.

(a) $\dfrac{d}{dx}(x^2 + 5)$

(b) $\dfrac{d}{dt}(5t + t^3)^9$

(c) $\dfrac{d}{dt}(at^2 + t^3)$

(d) $\dfrac{d}{da}(at^2 + t^3)$

(e) $\dfrac{d}{dy}(ay^2 + xky)$

(f) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}gt^2\right)$

(g) $\dfrac{d}{dx}(a_0 x + \phi)^6$

(h) $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d}{dx}(2tx^2)\right)$

Oppgave 13.
Deriver uttrykket $x^2yzta + tvxp^2$ med hensyn på x. Deriver det så isteden med hensyn på p.

Eksamensoppgaver

Midtveis eksamen høst 24 oppgave 8, 14, 15, 16, 17

Oppgave 14.
($\star$) La f være funksjonen gitt ved

$$f(x) = xe^{-x}, \quad x \in D_f = \mathbb{R}$$

(a) Finn eventuelle nullpunkter for f.

(b) Avgjør hvor f vokser og avtar, og angi eventuelle ekstremalpunkter for f.

(c) Avgjør hvor f er konveks og konkav, og angi eventuelle vendepunkter.

(d) Skisser grafen til f for hånd.

Oppgave 15.
La f være funksjonen gitt ved

$$f(x) = xe^{5x+3}, \quad D_f = (-1, 1/5]$$

Besvar punktene a)–c) fra oppgave ($\star$) for denne funksjonen.

Oppgave 16.
La f være funksjonen gitt ved

$$f(x) = xe^{ax+3}, \quad D_f = (-1, 1/a]$$

der $a > 2$ er et gitt, reelt tall. Man sier at a er en *parameter* i funksjonen. Besvar punktene a)–c) fra oppgave ($\star$) for denne funksjonen.

Oppgave 17.
Anta at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig på intervallet $[0, 1]$ og deriverbar på intervallet $(0, 1)$.
(a) Vis at hvis $f(0) = f(1)$, så fins $c \in (0, 1)$ slik at $f'(c) = 0$.

(b) Vis at hvis $f(1) = 5 \cdot f(0)$, så fins $c \in (0, 1)$ slik at $f'(c) = 4 \cdot f(0)$.