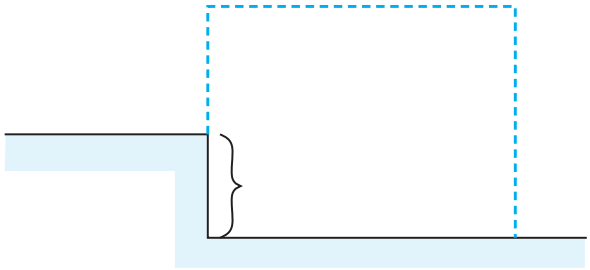
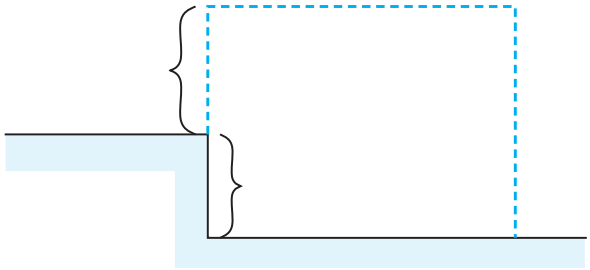
Oppgaver til uke 42 (ved Arne Hole)

Oppgave 1.
Vi skal lage en rektangulær innhegning ved å bruke 40 meter gjerde. Innhegningen skal ligge inn mot et hjørne på låveveggen, se figur. Høyden på innhegingen er x. Høyden tilsvarende låveveggen er representert med krøllparentes og er 4 meter. Vi vil finne x slik at innhegningen har størst mulig areal.



(a) Bruk figuren på neste side til å finne arealet av innhegningen som funksjon $A(x)$ av lengden x.



(b) Hvilken x gir størst areal av innhegningen?

Oppgave 2.
La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være definert ved

$$f(x) = \frac{\arctan x}{x^2 + 1} \tag{1}$$

(a) Vis at f har et maksimumspunkt i intervallet $[0, 1]$ og et minimumspunkt i $[-1, 0]$.

(b) Finn eventuelle asymptoter for f, og skisser grafen.

Oppgave 3.
Logaritmisk derivasjon er et regnetriks for derivasjon som bygger på formelen

$$\frac{d}{dx}\Big[\ln f(x)\Big] = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x), \tag{2}$$

det vil si

$$f'(x) = f(x) \cdot \frac{d}{dx}\Big[\ln f(x)\Big] \tag{3}$$

Bruk logaritmisk derivasjon til å finne $f'(x)$ når
(a) $f(x) = x^{3/2}(1+x)^{5/2}(1+x^2)^{7/2}$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2\sqrt{x^2 \sin x}}$

Oppgave 4.
En drake flyr rettlinjet i konstant høyde 100 meter. På et gitt tidspunkt løper det ut 2 meter snøre pr. sekund, 200 meter snøre er ute, og snøret er stramt. Hvor fort flyr draken?

Oppgave 5.
La f være funksjonen gitt ved

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}, \quad x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}. \tag{4}$$

(a) Finn eventuelle nullpunkter for f. Regn ut de fire grensene

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x), \tag{5}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x), \quad \lim_{x\to 2^-} f(x). \tag{6}$$

(b) Avgjør hvor f vokser og avtar, og angi eventuelle lokale eller globale ekstremalpunkter og tilhørende ekstremalverdier.

(c) Avgjør hvor f er konveks og konkav, og angi eventuelle vendepunkter. Skisser grafen til f.

Oppgave 6.
La $a > 0$ være et gitt reelt tall, og betrakt funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - a^2}, \quad x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{-a, a\}. \tag{7}$$

(a) Finn eventuelle nullpunkter for f. Regn ut de fire grensene

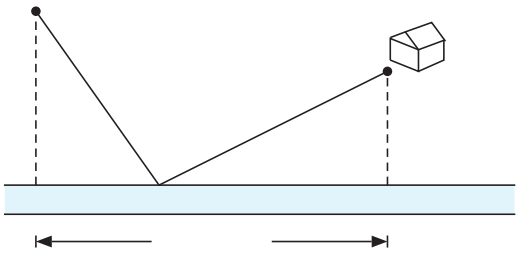
$$\lim_{x\to\infty} f(x), \quad \lim_{x\to-\infty} f(x), \tag{8}$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x), \quad \lim_{x\to a^-} f(x). \tag{9}$$

(b) Avgjør hvor f vokser og avtar, og angi eventuelle lokale eller globale ekstremalpunkter og tilhørende ekstremalverdier.

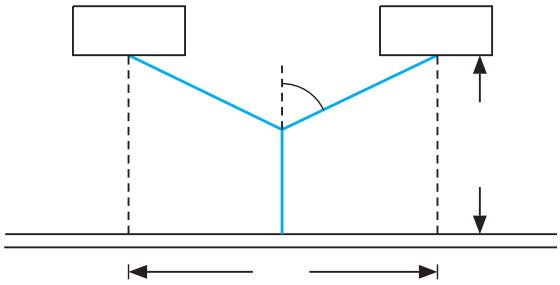
(c) Avgjør hvor f er konveks og konkav, og angi eventuelle vendepunkter. Skisser grafen til f.

Oppgave 7.
Etter å ha krøpet gjennom ørkenen i lengre tid, er du uttørstet og utsultet kommet frem til punktet A oppe til venstre på figuren under. Avstanden fra A til elven er på 90 meter. Avstanden fra kiosken til elven er 60 meter. Avstanden angitt med to piler er 200 meter.



Du vil krype til elven og deretter kiosken, men du har så lite krefter igjen at det er avgjørende å velge riktig vei. Vi lar x være avstanden (langs elven), fra det nærmeste punktet til A på elven, til det punktet du velger å nå elven. Hvordan skal x velges for at total krypelengde fra A til kiosken skal bli minst mulig?

Oppgave 8.
Du jobber på kommunens planleggingskontor, og i forbindelse med anlegging av et nytt boligfelt bes du om å løse følgende problem: Anta at to hus ligger side om side i en avstand b fra hovedveien, og at avstanden mellom husene er a. For å få kortest mulig veilengde å bygge, bør man da legge en vei rett inn til hvert av husene (stiplet på figuren), eller bør man lage en felles vei inn som deler seg i et kryss med vinkel θ? Anta $a < 2b$.
(a) Vis at dersom man velger krysssløsningen, er total veilengde L som funksjon av θ gitt ved



$$L(\theta) = b - \frac{a\cos\theta}{2\sin\theta} + \frac{a}{\sin\theta}$$

(b) Hvilken vinkel θ gir minst total veilengde L? For hvilke verdier av a og b lønner det seg å velge krysssløsningen?

Eksamensoppgaver Midtveis eksamen høst 24 oppgave 11, 12, 13

Oppgave 9.
Finn følgende grenseverdier:
(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x + \sin x}$
(b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$
(c) $\lim_{x\to-\infty} xe^x$
(d) $\lim_{x\to\infty} (1 + \dfrac{1}{x})^x$
(e) $\lim_{x\to\infty} x\tan(1/x)$

Oppgave 10.
Finn følgende grenseverdier:
(a) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$
(b) $\lim_{x\to 0^+} x^{1/x}$

Oppgave 11.
Patologiske tilfeller. Felles for de to grensene under er at noe typisk kan gå

«galt» hvis du prøver å bruke l'Hôpital direkte på dem. Forklar hva som skjer, og se om du kan finne grensene likevel.

(a) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-(1/x)}}{x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$

Oppgave 12.
La funksjonen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være definert ved

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

(a) Bruk definisjonen av den deriverte direkte til å vise at f er deriverbar i punktet $x = 0$.

(b) Skisser grafen til f.

Oppgave 13.
La K være et reelt tall, og la $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan x}{\sin 2x} & \text{for} x \neq 0 \\ K & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

(a) Bestem K slik at f blir kontinuerlig.

(b) Vis at når K har verdien funnet under a), er f deriverbar på hele D_f. Hva er $f'(0)$?

Oppgave 14.
La f være funksjonen definert ved

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(1/x^2)} & \text{for } x > 0, \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

(a) *Oppvarming.* Vis at:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x/x^m = +\infty$$

for alle $m \in \mathbb{N}$.

(b) Vis at f er deriverbar i 0, og at $f'(0) = 0$.

(c) Vis at $f^{(n)}(0) = 0$ for alle naturlige tall $n \geq 1$, der $f^{(n)}(0)$ er den n-te deriverte av f i punktet 0. Skisser grafen til f.

Oppgave 15.
Finn eventuelle skråasymptoter for $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = xe^{3/x}$.

Oppgave 16.
Finn eventuelle skråasymptoter for følgende funksjoner:
(a) $f(x) = x + \ln x$

(b) $f(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2}{x^3 + x + 1}$