Oppgaver til uke 42.5 (ved Arne Hole)

Oppgave 1.
La $f(x) = x^3$. La R være riemannsummen til f på intervallet $[0, 1]$ som er slik at alle rektangelbreddene er $\Delta x = 0.2$, og x_i^* er høyre endepunkt i hvert av delintervallene. Illustrer R på en figur, og finn verdien til R.

Oppgave 2.
La $f(x) = 4x$. La

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

være riemannsummen for f på intervallet $[0, 1]$ som vi får ved å dele intervallet i n like deler og bruke høyre endepunkt av hvert delintervall som x_i^*.

(a) Vis at $R_n = \dfrac{4}{n^2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i$.

(b) Finn integralet

$$\int_0^1 4x \, dx$$

ved hjelp av a). Hint: $1 + 2 + \cdots + n = n(n + 1)/2$.

Oppgave 3.
Bruk riemannsummer til å finne

$$\int_0^1 x^2 \, dx.$$

Du kan her bruke at

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

Oppgave 4.
Finn de bestemte integralene

(a) $\displaystyle\int_1^3 (x^2 - 4) \, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^b (kt + h) \, dt$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^1 (x^3 + 2) \, dx$

(d) $\displaystyle\int_0^x (1+t+t^2)\,dt$

Oppgave 5.
Skisser grafen til $f(x) = x^3$, med $D_f = \mathbb{R}$. Finn arealet av området begrenset av grafen til f, x-aksen og linjen $x = 2$. Skraver dette området på figuren.

Oppgave 6.
Finn $f'(x)$ for funksjonene $f(x)$ definert for alle $x \in \mathbb{R}$ ved
(a) $f(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x} \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}}\,dt$

(b) $f(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x^2} \sqrt{1+t^6}\,dt$

Oppgave 7.
Finn arealet avgrenset av grafen til funksjonen $f(x) = x^2 - 9$ og x-aksen.

Oppgave 8.
Finn arealet begrenset av grafen til

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2,$$

x-aksen og linjene $x = -2$ og $x = -1$. Tegn en figur der arealet er skravert.

Oppgave 9.
Finn arealet begrenset av grafen til funksjonen $f(x) = x^4 - 1$ og x-aksen. Illustrer på en figur.

Oppgave 10.
Finn arealet begrenset av grafene til de to funksjonene $f(x) = x^2$ og $g(x) = x + 2$.