Løsninger til oppgaver til uke 42 (ved Arne Hole)

Oppgave 1:

(a) Kall lengden av innhegningen for y. Da får vi målene på figuren. Siden vi totalt har 40 meter gjerde, blir $y = 40 - x - (x - 4) = 44 - 2x$. Arealet av $A = xy$ av innhegningen som funksjon av x blir dermed $A(x) = xy = x(44 - 2x) = 44x - 2x^2$.

(b) Vi deriverer for å finne maksimum: $A'(x) = 44 - 4x$. Ligningen $A'(x) = 0$ gir $x = 11$, og vi ser at $A'(x) < 0$ for $x < 11$ og $A'(x) > 0$ for $x > 11$. Altså: Arealet blir størst når $x = 11$ (m).

Oppgave 2:

(a) Vi får

$$f'(x) = \frac{1 - 2x \arctan x}{(1 + x^2)^2}$$

Innsetting gir at $f'(-1) < 0$, $f'(0) > 0$ og $f'(1) < 0$. Ved ekstremalverdisetningen har f et globalt maksimum og et globalt minimum hvis vi erstattter D_f med intervallet $[-1, 1]$. Vi ser at $f(x) = -f(-x)$, og at $f(x) > 0$ for $x > 0$. Det følger at når vi tar $D_f = [-1, 1]$ ligger det globale maksimumspunktet for f i intervallet $(0, 1)$, og det globale minimumspunktet ligger i $(-1, 0)$. For å se at disse to er globalt maks og min for f også når $D_f = \mathbb{R}$, observer at $x \geq 1$ gir

$$1 - 2x \arctan x \leq 1 - 2 \cdot 1 \cdot \arctan 1 = 1 - 2 \cdot (\pi/4) < 0$$

Her brukte vi at $\arctan x$ er strengt voksende for $x \geq 0$. Det følger at $f'(x) < 0$ for $x \geq 1$, så maksimumspunktet på $[-1, 1]$ er også globalt maksimum for f på hele $\mathbb{R}$. Tilsvarende fås at minimumspunktet på $[-1, 1]$ er globalt minimum for f på $\mathbb{R}$.

Ved skjæringssetningen følger at det det fins $a \in (-1, 0)$ og $b \in (0, 1)$ slik at $f'(a) = f'(b) = 0$.

(b) $y = 0$ er horisontal asymptote (tosidig)

Oppgave 3:

(a) Regneregler for ln gir

$$\ln f(x) = \ln x^{3/2} + \ln(1 + x)^{5/2} + \ln(1 + x^2)^{7/2} \tag{1}$$

$$= \frac{3}{2} \ln x + \frac{5}{2} \ln(1 + x) + \frac{7}{2} \ln(1 + x^2) \tag{2}$$

Dette gir $f'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]' = f(x) \cdot [3/(2x) + 5/(2 + 2x) + 14x/(2 + 2x^2)]$.

(b) Her har vi

$$\ln\sqrt{x^2\sqrt{x^2\sin x}} = \ln[x^{3/2}\cdot(\sin x)^{1/4}] = \frac{3}{2}\ln x + \frac{1}{4}\ln(\sin x)$$

Dette gir $f'(x) = f(x)\cdot[\ln f(x)]' = f(x)\cdot[3/(2x) + \cos x/(4\sin x)]$.

Oppgave 4:

$4/\sqrt{3}$ m/s ≈ 2.3 m/s

Oppgave 5:

(a) 0 er eneste nullpunkt, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

(b) Vokser på $(-\infty,-2)$ og $(-2,0]$, avtar på $[0,2)$ og $(2,\infty)$. Lokalt maksimum i $x=0$. Lokal maksimumsverdi $f(0)=0$.

(c) Konveks på $(-\infty,-2)$ og $(2,\infty)$, konkav på $(-2,2)$

Oppgave 6:

(a) 0 er eneste nullpunkt, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$.

.

(b) Vokser på $(-\infty,-a)$ og $(-a,0]$, avtar på $[0,a)$ og (a,∞). Lokal maksimumsverdi $f(0)=0$.

(c) Konveks på $(-\infty,-a)$ og (a,∞), konkav på $(-a,a)$.

Oppgave 7:

Her fins det et triks, nemlig å speile kioskens posisjon om den øvre elvebredden. Den korteste veien fra A til speilbildet av kiosken er en rett linje, og speilbildet tilbake av den turen, som knekker ved elvebredden, må da bli den korteste veien fra A til kiosken. Tegn figur som viser speilbildet av kiosken og den rette linjen. Formlike trekanter gir

$$\frac{x}{90} = \frac{200-x}{60}$$

som løst med hensyn på x gir $x = 120$. Alternativt: Pytagoras gir at krypelengden $f(x)$ er gitt ved

$$f(x) = \sqrt{x^2+90^2} + \sqrt{(200-x)^2+60^2}$$

Finn $f'(x)$ og sett $f'(x)=0$, det gir $x=120$. Bør altså velge $x=120$ meter.

Oppgave 8:

(a) La h være avstanden fra veien til krysset, og la $x = b - h$. Da er

$$\frac{(a/2)}{x} = \tan\theta, \quad \text{som gir} \quad x = \frac{a\cos\theta}{2\sin\theta}$$

Hvis vi lar y være avstanden fra krysset til et av husene, blir y hypotenusen i en trekant med kateter x og $a/2$. Pytagoras gir

$$y = \sqrt{x^2 + a^2/4}$$

Dette gir (husk at $\theta \in (0, \pi/2)$)

$$L(\theta) = h + 2y = (b - x) + 2y \tag{3}$$

$$= b - x + 2\sqrt{\frac{a^2\cos^2\theta}{4\sin^2\theta} + \frac{a^2}{4}} = b - x + 2\cdot\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + 1} \tag{4}$$

$$= b - x + a\cdot\frac{1}{\sin\theta} = b - \frac{a\cos\theta}{2\sin\theta} + \frac{a}{\sin\theta} \tag{5}$$

(b) Vi har

$$L'(\theta) = \frac{a}{2}\frac{1}{\sin^2\theta} - a(\sin\theta)^{-2}\cos\theta \tag{6}$$

$$= \frac{a}{2}\frac{1}{\sin^2\theta} - a\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{a}{\sin^2\theta}\Big(\frac{1}{2} - \cos\theta\Big) \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

Så $L'(\theta) = 0$ gir $\cos\theta = \frac{1}{2}$, der $L'(\theta)$ skifter fra negativ til positiv. Altså gir $\theta = 60°$ minst total veilengde. Kryssløsningen er best hvis $L(60°) < 2b$. Innsetting gir at $L(60°) = b + (\frac{1}{2}\sqrt{3})a$. Så kryssløsningen er best når $b > (\frac{1}{2}\sqrt{3})a$.

Midtveis eksamen høst 24 oppgave 11, 12, 13

Oppgave 9:

(a) 1/2

(b) $+\infty$

(c) 0

(d) e

(e) 1

Oppgave 10:

(a) 0

(b) 0

Oppgave 11:

(a) Hint: Skriv brøken på en annen måte, med $e^{1/x}$ i nevneren og $1/x$ i telleren. Grensen blir 0.

(b) Hint: Her kan du for eksempel faktorisere ut $x/(\sin x)$, som vi vet at går mot 1. Resten av uttrykket blir da $x \cdot \sin(1/x)$, der første faktor går mot 0, og den andre er begrenset av ± 1. Altså er hele grensen 0.

Oppgave 12:

(a) Vi har

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin h}{h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h - h}{h^2}$$

To ganger l'Hopital gir nå at $f'(0) = 0$.

Oppgave 13:

(a) $K = 1/2$

(b) Vi har

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\arctan h}{\sin 2h} - \frac{1}{2}}{h} \tag{9}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+h^2} \cdot \sin 2h - \arctan h \cdot 2\cos 2h}{1} = \frac{1\cdot 0 - 0 \cdot 2}{1} = 0 \tag{10}$$

Oppgave 14:

(a) F. eks. fra binomialformelen når $x = n \in \mathbb{N}$. Evt. $m = 1$ fÃ¸rst og induksjon. Se også oppgave over.

(b) For $x > 0$ har vi

$$f'(x) = \frac{(-2)}{x^3} \cdot e^{-1/x^2}$$

Altså $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$, og det er opplagt at $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$ også. Altså $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$, og siden f er kontinuerlig i $x = 0$ følger at

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x) = 0.$$

(Bruker KOLA §6.8 Teorem 1)

(c) Metoden er den samme som i punkt b). Ved gjentatt derivasjon følger (induksjon) at for $x > 0$ har vi

$$f^{(n)}(x) = \frac{P(x)}{x^m} \cdot e^{-1/x^2}$$

der $P(x)$ er et polynom og $m > 0$ er et helt tall.

Altså $\lim_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = 0$, og det er opplagt at $\lim_{x\to 0^-} f^{(n)}(x) = 0$ også. Altså $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$, og siden $f^{(n-1)}(x)$ er kontinuerlig i $x = 0$ (induksjon) følger at

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0.$$

Oppgave 15:

Vi får

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{3/x} = e^0 = 1$$

og så

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x\to\infty} [xe^{3/x} - x] = \lim_{x\to\infty} x(e^{3/x} - 1) \tag{11}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{3/x} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{3/x} \cdot (\frac{-3}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = 3 \tag{12}$$

Altså er $y = ax + b = x + 3$ en skråasymptote.

Oppgave 16:

(a) Her gir metoden $a = 1$, men grensen for b blir $\lim_{x\to\infty} \ln x = +\infty$. Altså ingen skråasymptote.

(b) Her får du $a = 1$, og så $b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - x] = 0$. Så $y = x$ er en skråasymptote.