Oppgaver til uke 43 (ved Arne Hole)

Integrasjon ved substitusjon

Oppgave 1.
Finn integralene under.

(a) $\int x(x^2+9)^{13}\,dx$

(b) $\int \frac{x^3}{(7x^4-5)^5}\,dx$

(c) $\int (6x+5)^7\,dx$

(d) $\int (ax+b)^7\,dx$

(e) $\int \sqrt{x}\,dx$

(f) $\int t\sqrt{t^2+1}\,dt$

(g) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

(h) $\int \frac{4y^2}{\sqrt{8-y^3}}\,dy$

Oppgave 2.
Finn integralene under.

(a) $\int \sqrt{8x+3}\,dx$

(b) $\int \sqrt{a_0x+r}\,dx$

(c) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

(d) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

(e) $\int \frac{x-5}{\sqrt{x}}\,dx$

(f) $\int t^3\sqrt{1+t^4}\,dt$

Oppgave 3.
Vi skal her se et eksempel på at to ting som tilsynelatende er like, ikke nødvendigvis *er* like.
(a) Bruk substitusjonen $u = 1 - x$ til å vise at

$$\int \frac{1}{(1-x)^2}\,dx = \frac{1}{1-x} + C_1,$$

der C_1 er en integrasjonskonstant.

(b) Vis ved derivasjon av høyre side at

$$\int \frac{1}{(1-x)^2}\,dx = \frac{x}{1-x} + C_2,$$

der C_2 er en integrasjonskonstant.

(c) Kan du forklare hvordan resultatene i a) og b) henger sammen?

Oppgave 4.
Eksamensoppgaver:
Høst 24 Oppgave 3a, høst 23 Oppgave 4.

Substitusjon

Oppgave 5.
La $n > 1$ være et helt tall. Bruk substitusjonen $u = \sqrt[n]{x}$ til å finne integralene
(a) $\int \sqrt[n]{x}\,dx$

(b) $\int \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\,dx$

Oppgave 6.
La $n > 1$ være et helt tall. Finn integralet $\int_0^1 x^7(x^8+4)^n\,dx$

Delvis integrasjon

Oppgave 7.
Finn integralene
(a) $\int x\cos x\,dx$

(b) $\int xe^{-x}\,dx$

(c) $\int x\ln x\,dx$

(d) $\int_0^1 xe^{5x}\,dx$

(e) $\int x^2e^{2x}\,dx$

(f) $\int \log x\,dx$

Oppgave 8.
Finn integralene
(a) $\int e^x\cos x\,dx$

(b) $\int e^{2t}\sin(4t)\,dt$

Oppgave 9.
For hvert heltall $n \geq 0$, la $I_n = \int x^n e^x\,dx$
(a) Vis at $I_n = x^n e^x - nI_{n-1}$ for alle $n \geq 1$.
(b) Bruk resultatet fra a) til å finne $\int x^4e^x\,dx$.

Oppgave 10.
Finn integralene
(a) $\int \dfrac{dx}{x^2+6x+9}$

(b) $\int \dfrac{4x+1}{(x^2-2x+10)^2}\,dx$

(c) $\int \dfrac{6x+6}{x^2+x-2}\,dx$

(d) $\int \dfrac{x^3}{x+1}\,dx$

(e) $\int \dfrac{x^2+6x-9}{x^3-9x}\,dx$

(f) $\int \dfrac{4x^2+5x-3}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^2 + x + 2}{(x+1)(x^2+1)}\, dx$