Oppgaver til uke 45 (ved Arne Hole)

Oppgave 1.
Vis at de oppgitte funksjonene f er løsninger av den gitte differensialligningen. Angi også intervallene der funksjonene er løsninger.
(a) $y' = y - 1, \;\; y(t) = e^t + 1$

(b) $y' = 2y + 16, \;\; y(t) = 5e^{2t} - 8$

(c) $y'' = -y, \;\; y(t) = \sin t$

(d) $y' = y^2, \;\; y = \dfrac{1}{2 - t}$

I oppgavene 2–10 skal du gjøre følgende:

(a) Finn den generelle løsningen av den oppgitte differensialligningen.

(b) Finn en spesiell løsning av diffligningen som oppfyller initialkravet gitt bak ligningen.

(L, R, E, p_0, y_0, w_0, k, q og r er konstanter.)

Oppgave 2.
$y' - 2y = -14, \quad y(0) = 5$

Oppgave 3.
$y' + 5y = t, \quad y(0) = 1$

Oppgave 4.
$y' = 3(y - 1), \quad y(0) = 0$

Oppgave 5.
$y' - p_0 y = w_0 q, \quad y(0) = y_0$

Oppgave 6.
$y' = \frac{1}{2}ty + 2y, \quad y(0) = -2$

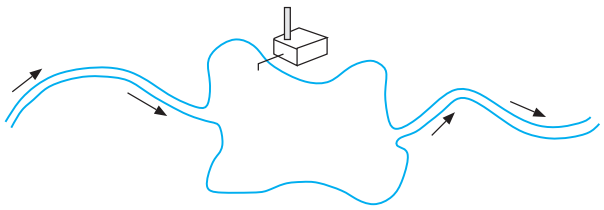
Oppgave 7.
$y' + \dfrac{t}{t^2 + 1} y = \dfrac{1}{(1 + t^2)^{3/2}}, \quad y(0) = 1$

Oppgave 8.
$t \cdot y' - y = t \ln t \quad (t > 0), \quad y(1) = 1$

Oppgave 9.
$y' + ky = qt + r \quad (t > 0), \quad y(0) = y_0$

Oppgave 10.
$L(dI/dt) + RI = E, \quad I(0) = 0$

Oppgave 11.
Onkel Skrue har etablert en ny fabrikk ved bredden av den (foreløpig) vakre Andesjøen, og akter å slippe fabrikkens avfallsstoffer ut i innsjøen. Problemet er at Andeby forurensningstilsyn (AFT) ikke vil tillate at innsjøen kan ha høyere konsentrasjon enn 0.002 kilo av Skrues avfallsstoff pr. kubikkmeter vann. Skrue ønsker å operere med en konstant utslippsrate k (kg/døgn), og vil finne ut hvor stor han kan velge k uten å komme i tottene på AFT. Fagersjøen rommer 10^8 liter vann, og giften Skrue slipper ut, blander seg raskt jevnt utover i vannet. Rent vann strømmer inn i innsjøen med hastighet $5 \cdot 10^6$ liter pr. døgn, og samtidig renner det $5 \cdot 10^6$ liter vann (heretter jevnt blandet med Skrues giftstoffer) *ut* av innsjøen pr. døgn. Se tegning. La $g(t)$ være giftmengden i innsjøen ved tid t målt i kilo, der t er målt i døgn.



(a) Sett opp en differensialligning for $g(t)$ gitt at fabrikken har konstant utslippsrate k. Løs så ligningen med initialbetingelse $g(0) = 0$. Finn ut hvilken verdi giftmengden i tjernet vil stabilisere seg på, uttrykt ved k. Hvilken utslippsrate k bør Skrue velge for å kunne forurense mest mulig samtidig som han holder seg innenfor reglene til AFT?

Etter en stund klarer Skrue å bestikke en ansatt i AFT til å gi ham beskjed om eventuelle vannprøver AFT skal ta av innsjøen *10 dager i forveien*. Skrues idé er at hvis utslippet stoppes 10 dager før hver test, kan han nå velge utslippsraten sin høyere enn før.
(b) Sett opp den diffligningen som gjelder for $g(t)$ i perioder hvor Skrue har stanset utslippet sitt. Hvor høy kan Skrue velge sin utslippsrate k gitt at forurensningsnivået skal synke ned til grensen AFT godtar i løpet av 10 dager med stans i utslippene?

Oppgave 12.
Et uløst problem i tallmystikk. I denne oppgaven skal vi lete etter en funksjon

$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ slik at den deriverte av f også er den *omvendte funksjonen* til f. Med andre ord ønsker vi at f skal oppfylle differensialligningen

$$f'(x) = f^{-1}(x)$$

på intervallet $x \in (0, \infty)$.
(a) Anta at f er på formen

$$f(x) = Cx^a,$$

der $C > 0$ og $a > 0$. Vis at hvis f er en løsning av differensialligningen, må vi ha $a = \phi$, der ϕ er det *gylne snitt*. Det gylne snitt er gitt ved

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(b) Vis at hvis

$$a = \phi$$

og $C = \phi^{-1/\phi}$, så er f en løsning av differensialligningen.

(c) (Uløst.) Finn en reell modelleringssituasjon der differensialligningen $f' = f^{-1}$ oppstår. (Tallmystikere ville elske et slikt eksempel, for de er svært opptatt av situasjoner der ϕ dukker opp.)

I oppgavene 13–15 skal du gjøre følgende:

(a) Finn den generelle løsningen av den oppgitte differensialligningen.

(b) Finn en spesiell løsning av differensialligningen som oppfyller initialkravet gitt bak ligningen.

Oppgave 13.
$y^2 \cdot y' = t, \quad y(1) = 0$

Oppgave 14.
$y' = y^4 t, \quad y(0) = 1/2$

Oppgave 15.
$y' = \dfrac{y}{t}, \quad y(1) = 1$

Oppgave 16.
Finn den generelle løsningen av diffligningen $y' = y^2 + x^3 + 1 + x^3 y^2$

Oppgave 17.
Diffligningen $y' = y - 1$ kan løses både som en separabel ligning og som en

lineær ligning. Finn den generelle løsningen på begge måter, og sammenlign svarene.

Oppgave 18.
Man har (via romsonder) observert at *de underlige uglene på Mars* faktisk *avtar i størrelse* etter som de blir eldre. La $M(t)$ være volumet av en ugle ved tid t, der t er målt i år. Størrelsen $M'(t)$ kan vi kalle *minkefarten* til uglen, og denne farten synes å være omvendt proporsjonal med uglens volum. Proporsjonalitetskonstanten er ca. 2 (pr. år), slik at vi altså har

$$-M'(t) = \frac{2}{M(t)}$$

Uglene har volum 10 m^3 når de fødes, og de dør (pr. definisjon) når volumet blir null. Hvor lenge lever en Mars-ugle?