FORMELSAMLING FOR MAT 1100U, oppdatert høsten 2024

Eksponentialfunksjoner

Derivasjon: $(a^x)' = a^x \ln a$ spesielt $(e^x)' = e^x$

Identiteter: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Logaritmefunksjonen

Derivasjon: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

Identiteter: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$ $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$

$\ln(x^a) = a \ln x$ for $x, y > 0$

Trigonometriske funksjoner

Derivasjon: $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Identiteter: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin x = \pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

$\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–

Arcusfunksjoner

Derivasjon: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Komplekse tall

Skrivemåter: $z = a + ib = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta}$

Eksponentialfunksjonen: $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$

De Moivres formel: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Anvendelser av integrasjon

Volum av omdreiningslegemer om x-aksen: $V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$

Volum av omdreiningslegemer om y-aksen: $V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$

Buelengde: $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$

Differensiallikninger

Annenordens differensiallikning $y'' + py' + qy = 0$:

$$y(x) = \begin{cases} Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x} & \text{hvis to reelle røtter } r_1 \neq r_2 \\ Ce^{rx} + Dxe^{rx} & \text{hvis én reell rot } r \\ Ce^{ax}\cos(bx) + De^{ax}\sin(bx) & \text{hvis to komplekse røtter } r = a \pm ib \end{cases}$$

Taylorpolynomet med restledd

$$\begin{aligned} f(x) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

Rekker

$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ konvergerer hvis og bare hvis $p > 1$

Geometriske rekker: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, konvergensområde $(-1, 1)$

Noen taylorrekker: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, konvergensområde $[-1, 1)$

$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, konvergensområde $[-1, 1]$