Velkommen til MAT1100U!

~~Før jul:~~
Forelesninger: 6 + 10
~~Høstferie~~ 30. sept.
Oblig 1 deles ut 23. sept.
leveres inn 21. okt.
Regnelørdager (kl. 10–16): 17. oktober og 12. desember
Midtveiseksamen tirsdag 15. des. kl. 9–11.

Kap. 3 Komplekse tall

Intro:

En mengde er en samling av objekter.
La A være en mengde og a være et element i A.
Vi skriver:

$a \in A$ 

$b \notin A$

La A og B være to mengder.
Mengden av elementer som er i A <u>eller</u> B
kalles unionen av A og B:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

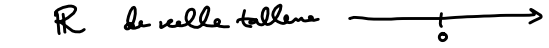
"betingelse følger"
"slik at"

Mengden av elementer som er i A og i B
kalles snittet av A og B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$\emptyset$: den tomme mengden

Tallmengder:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ de naturlige tallene
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ de hele tallene $2x = 1$
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$ de rasjonale tallene $x^2 = 2$
$\mathbb{R}$ de reelle tallene 

$x^2 = -1$

$\mathbb{C}$ de komplekse tallene: kap. 3

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$\uparrow$
inneholdt i

---

studieinfo@math.uio.no

pause til 18^{00}

Motivasjon for å innføre komplekse tall:

1) $\sqrt{-1} = ?$

2) to vektorer i planet $\vec{u}$ og $\vec{v}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{w}$?

og slik at vi har alle kjente regneregler

Svar på lange spørsmål er gitt av komplekse tall.

Anta at det fins et tall i slik at $i^2 = -1$.

Vi bruker kjente regneregler fra $\mathbb{R}$ og ser hva skjer:

La $b \in \mathbb{R}$.

$$(ib)^2 = i^2 b^2 = -b^2 < 0$$

(uendelig mange tall $ib, b \in \mathbb{R}$ som er slik at $(ib)^2 < 0$)

Tall på formen ib kalles imaginære.

Definisjon:

De komplekse tallene:

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

eks. $10+3i$, i, $-3+i$

$10+i3$ $\quad$ $i-3$

La z være $z = a+ib$.

Vi kaller a for realdelen til z, $\mathrm{Re}(z) = a$.

Vi kaller b for imaginærdelen til z, $\mathrm{Im}(z) = b$.

eks. $\mathrm{Re}(2+i) = 2$, $\mathrm{Im}(1 - \frac{1}{2}i) = -\frac{1}{2}$

La $z, w \in \mathbb{C}$. Da er $z = w \iff \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(w)$ og $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(w)$.

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$a \in \mathbb{R}$, $a = a + 0 \cdot i \in \mathbb{C}$

Å regne i $\mathbb{C}$:

Addisjon:

La $z = a+ib$ og $w = c+id$.

$z+w = (a+ib)+(c+id) = a+c+i(b+d)$

Multiplikasjon:

$z \cdot w = (a+ib)(c+id) = ac+iad+ibc+i^2bd$ ($i^2 = -1$)

$= ac-bd+i(ad+bc)$

Eks: $(5+2i)(8+3i) = 40+15i+16i+6i^2$ ($i^2 = -1$)

$= 34+31i$

Divisjon:

$\frac{z}{w} = \frac{(a+ib)}{(c+id)} \cdot \frac{(c-id)}{(c-id)} = \frac{ac-iad+ibc-i^2bd}{c^2-i^2d^2}$ ($i^2 = -1$)

$= \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

Eks: $\frac{(36+4i)}{(4-i)} \cdot \frac{(4+i)}{(4+i)} = \frac{144+16i+36i-4}{16+1} = \frac{140+52i}{17} = \frac{140}{17} + \frac{52}{17}i$

Ny operasjon: Konjugasjon

La $z = a+ib$. Den konjugerte til z, $\overline{z} = a-ib$.

$\mathrm{Im}(z) = b$

$\mathrm{Im}(\overline{z}) = -b$

Eks: $\overline{(3-i)} = 3+i$

Anta $z = \overline{z}$.

La $z = a+ib$. Da er $\overline{z} = a-ib$.

Hvis $z = \overline{z}$ så er $a+ib = a-ib$

$b = -b$

$b = 0$, dvs. $\mathrm{Im}(z) = 0$ så $z \in \mathbb{R}$.

Vi har vist: $z = \overline{z} \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

Anta at $z \in \mathbb{R}$. La $z = a$.

Da er $z = a+0i$ så $\overline{z} = a-0i = a = z$.

Vi har vist: $z \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \overline{z}$

Dvs. (Det vil si) Resultat: $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Resultater:
- Setning
- Teorem
- Lemma
- Proposisjon
- Korollar

Regneregler for konjugasjon:

$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

$\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$

$\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ (Gjelder!)

$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ ($w \neq 0$) (Gjelder!)

($z = a+ib$, $w = c+id$)

$z+w = a+c+i(b+d)$

$\overline{z+w} = a+c-i(b+d)$

$\overline{z}+\overline{w} = a-ib+c-id$

$= a+c-i(b+d)$

$= \overline{z+w}$

Merk! La $z = a+ib$.

$z \cdot \overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 \in \mathbb{R}$

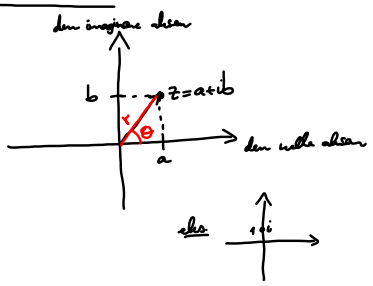
Eks: $z^2+3 = (z-i\sqrt{3})(z+i\sqrt{3})$

3.2. Geometrisk tolkning av komplekse tall

$z = a + ib$

$\mathrm{Re}(z) = a$

$\mathrm{Im}(z) = b$



> Vi kan tenke på et komplekst tall som et punkt / en vektor i planet. Caspar Wessel

De komplekse tallene: tallplan!
De reelle tallene: tallinje

eks.

a og b kalles de kartesiske koordinatene til z.

$a + ib$ kalles den kartesiske formen til z.

θ theta

Polarkoordinater:

r : avstanden fra origo (lengden på vektoren)

$r = |z|$ kalles modulusen til z

θ : vinkelen vektoren danner med den positive førsteaksen

Merk! $\theta + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ gir samme tall (bruker ofte at $\theta \in [0, 2\pi)$)

θ kalles argumentet til z

Sammenheng mellom a og b og r og θ:

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\cos\theta = \frac{a}{r}$, $a = r\cos\theta$

$\sin\theta = \frac{b}{r}$, $b = r\sin\theta$

$\left(\frac{a}{r}, \frac{b}{r}\right)$ ligger på enhetssirkelen

$\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1$

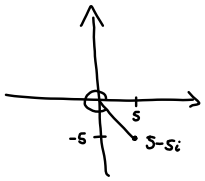
> Kartesisk form: $z = a + ib$
> Polarform: $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$

eks: $z = 5 - 5i$

Skriv z på polarform.

$r = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$

θ : $\cos\theta = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\theta = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4}$



θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

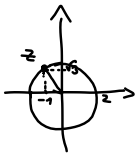
eks: Da z har polarkoordinater $r = 2$ og $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Skriv z på kartesisk form.

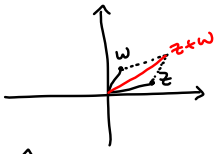
$a = r\cos\theta = 2 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} = 2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

$b = r\sin\theta = 2 \cdot \sin\frac{2\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$z = -1 + \sqrt{3}i$

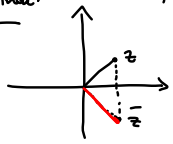


Addisjon geometrisk:



vektoraddisjon

Konjugasjon geometrisk:



speiling om førsteaksen

Multiplikasjon geometrisk:

$z = r_1\cos\theta_1 + i r_1 \sin\theta_1$

$w = r_2\cos\theta_2 + i r_2 \sin\theta_2$

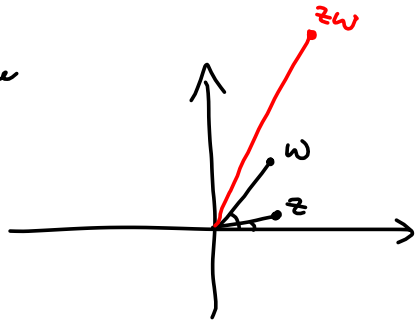
$$zw = (r_1\cos\theta_1 + i r_1\sin\theta_1)(r_2\cos\theta_2 + i r_2\sin\theta_2)$$

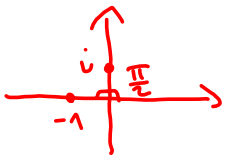
$$= r_1 r_2 \cos\theta_1\cos\theta_2 + i r_1 \sin\theta_1 r_2\cos\theta_2 + r_1\cos\theta_1 i r_2 \sin\theta_2 + i^2 r_1 r_2 \sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$= r_1 r_2 \underbrace{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)}_{\cos(\theta_1+\theta_2)} + i r_1 r_2 \underbrace{(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)}_{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

$$= r_1 r_2 \cos(\theta_1+\theta_2) + i r_1 r_2 \sin(\theta_1+\theta_2)$$

"Produktet har lengde lik produktet av lengdene og vinkel lik summen av vinklene."





$i^2 = -1$