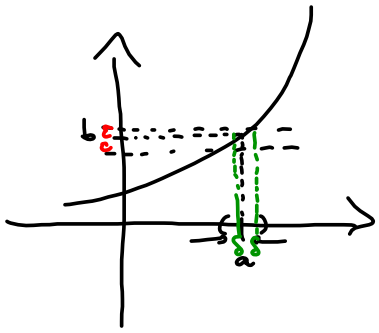
28. oktober, forelesning 10

5.4. Grenseverdier

et sentralt begrep når vi studerer funksjoner

La f være en funksjon og la a være et punkt.



Definisjon: Funksjonen f er definert i nærheten av a hvis det finns $v > 0$ slik at f er definert i $(a-v, a+v)$ muligens i a selv.

Definisjon: La f være definert i nærheten av a.
Vi sier at $f(x)$ nærmer seg b som grenseverdi når x nærmer seg a hvis for hver $\varepsilon > 0$ finns $\delta > 0$ slik at for alle x slik at $0 < |x-a| < \delta$ så er $|f(x)-b| < \varepsilon$.

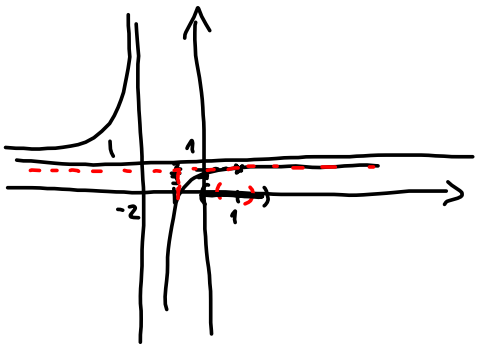
Vi skriver: $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

eks. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+x-2}$

$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}$

$= \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x+2}$

$= \frac{2}{3}$



Vis at dette stemmer ved ε-δ-definisjonen:

Gitt $\varepsilon > 0$. Vi vil vise at det finns $\delta > 0$ slik at for alle x slik at $0 < |x-1| < \delta$ så er

$\left| \frac{x^2-1}{x^2+x-2} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$.

$\left| \frac{x^2-1}{x^2+x-2} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{3x^2-3-2x^2-2x+4}{3(x+2)(x-1)} \right|$

$= \left| \frac{x^2-2x+1}{3(x+2)(x-1)} \right| = \left| \frac{(x-1)^2}{3(x+2)(x-1)} \right| = \left| \frac{x-1}{3(x+2)} \right|$

La $\delta < 1$. Dvs. $|x-1| < 1$ så $0 < x < 2$

$2 < x+2 < 4$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{x+2} > \frac{1}{4}$

Når $|x-1| < \delta$ og $\delta < 1$ så er $\left| \frac{1}{x+2} \right| < \frac{1}{2}$ så $\left| \frac{x-1}{3(x+2)} \right| < \frac{\delta}{3 \cdot 2} = \frac{\delta}{6}$

Vi setter $\frac{\delta}{6} = \varepsilon$ så $\delta = 6\varepsilon$.

La $\delta = \min(1, 6\varepsilon)$.

Da har vi at når $0 < |x-1| < \delta$ så er $\left| \frac{x^2-1}{x^2+x-2} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$. ∎

[Dette er fordi vi har to muligheter:

1) $\delta = 1$, dvs. $\varepsilon \geq \frac{1}{6}$

Da er $\left| \frac{x-1}{3(x+2)} \right| < \frac{1}{3 \cdot 2} \leq \varepsilon$

2) $\delta = 6\varepsilon$, dvs. $\varepsilon < \frac{1}{6}$

Da er $\left| \frac{x-1}{3(x+2)} \right| < \frac{\delta}{6} = \frac{6\varepsilon}{6} = \varepsilon$.]

Regneregler:

La f og g være definert i nærheten av a.

La $\lim_{x\to a} f(x) = F$ og $\lim_{x\to a} g(x) = G$.

Da har vi at

i) $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = F+G$

ii) $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = F-G$

iii) $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = FG$

iv) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}$, $G\neq 0$

Bevis: iii) Anta at $\lim_{x\to a} f(x) = F$ og $\lim_{x\to a} g(x) = G$.

Gitt $\varepsilon > 0$. Vi må vise at fins $\delta > 0$ slik at for alle x slik at $0 < |x-a| < \delta$ så er

$|f(x)g(x) - FG| < \varepsilon$.

$|f(x)-F|$

$|g(x)-G|$

Vi har:

$$|f(x)g(x) - FG| = |f(x)g(x) \underbrace{- f(x)G + f(x)G}_{=0} - FG|$$

$$= |f(x)(g(x)-G) + (f(x)-F)G|$$

trekant-ulikheten

$$\leq \underbrace{|f(x)(g(x)-G)|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{|(f(x)-F)G|}_{<\varepsilon/2}$$

1) $|(f(x)-F)G| = |f(x)-F||G|$

Siden $\lim_{x\to a} f(x) = F$ fins $\lambda > 0$ slik at når $0 < |x-a| < \lambda$ så er $|f(x)-F| < \frac{\varepsilon}{2|G|}$.

2) $|f(x)(g(x)-G)| = |f(x)||g(x)-G|$

$|f(x)| = |f(x)-F+F| \leq |f(x)-F| + |F|$

Siden $\lim_{x\to a} f(x) = F$ så fins $\theta > 0$ slik at når $0 < |x-a| < \theta$ så er $|f(x)| < \varepsilon + |F|$ *

$(|f(x)-F| < \varepsilon)$

3) siden $\lim_{x\to a} g(x) = G$ så fins $\gamma > 0$ slik at når $0 < |x-a| < \gamma$ så er

$$|g(x)-G| < \frac{\varepsilon}{2(\varepsilon+|F|)}$$

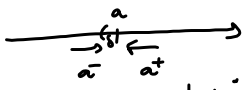
La $\delta = \min(\lambda, \theta, \gamma)$.

Da er $|f(x)g(x)-FG| \leq |f(x)||g(x)-G| + |f(x)-F||G|$

$$< {}^{*}(\varepsilon+|F|)\frac{\varepsilon}{2(\varepsilon+|F|)} + \frac{\varepsilon}{2|G|}\,|G|$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Ensidige grenser:



Vi sier at $f(x)$ nærmer seg b når x nærmer seg a nedenfra (a^-) hvis for hver $\varepsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at når $x \in (a-\delta, a)$ så er $|f(x) - b| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$$

Tilsvarende med $\lim_{x \to a^+} f(x) = b$.

Vi har $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = b \text{ og } \lim_{x \to a^+} f(x) = b.}$

Oppsummering:

Funksjonen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig i

- $c \in (a,b)$ hvis $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$
- endepunktet a hvis $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
- — " — b hvis $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Regne ut grenseverdier:

1) bruke kontinuitet:

$$\lim_{x \to 0} (-e^x + \sqrt{x} \sin x) = \underline{1}$$

2) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{x+2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to -2} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x \to -2} (x-2) = \underline{-4}$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \underline{\frac{1}{2}}$

4) bruke $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

ellers. $\lim_{x \to 0} \frac{2\sin x + 5x}{x} = \lim_{x \to 0} 2 \cdot \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}_{\to 1} + 5 = 2 \cdot 1 + 5 = \underline{7}$

---

oppg.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2} + rx, & x > 1 \end{cases}$$

Hva må r være for at f er kontinuerlig?

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$ og $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{2} + r$

$f(1) = 1$

For at f er kont. må $\frac{1}{2} + r = 1$, dvs. $r = \frac{1}{2}$

∞ i grenseverdier:

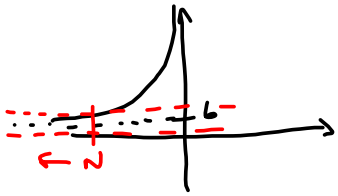
"$i\infty$?"

∞

$x \to \infty$:

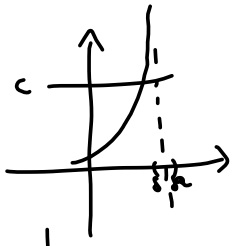
$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ for hver $\varepsilon > 0$ så finns $N \in \mathbb{R}$ slik at når $x \geq N$ så er $|f(x) - b| < \varepsilon$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ — " — — " — $x \leq N$ — " —

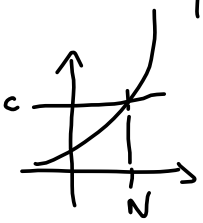


Regnereglene gjelder!

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ for hver $c \in \mathbb{R}$ så finns $\delta > 0$ slik at når $|x - a| < \delta$ så $f(x) > c$.



$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ for hver $c \in \mathbb{R}$ så finns $N \in \mathbb{R}$ slik at når $x \geq N$ så er $f(x) \geq c$

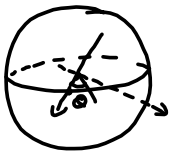


Oppg:



Vis at det finns to antipodale punkter på ekvator som har nøyaktig samme temperatur.

La $T(\theta)$ være temperaturen ved ekvator gitt tidspunkt i punktet med lengdegradsvinkel θ, $\theta \in [0, 2\pi]$.



(Ønsker: c slik at $T(c) = T(c+\pi)$)

$T(c) - T(c+\pi) = 0$

La $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = T(x) - T(x+\pi)$

Vi antar at T er kontinuerlig. Da er f kont. og

$f(0) = T(0) - T(\pi)$

$f(\pi) = T(\pi) - T(\pi+\pi) = T(\pi) - T(0)$

så $f(0)$ og $f(\pi)$ har motsatt fortegn.

Ved skjæringssetningen finns $c \in (0,\pi)$ slik at $f(c) = 0$, dvs. $T(c) = T(c+\pi)$.