# Forelesning 11, 4 november

## Kap. 6 Derivasjon:

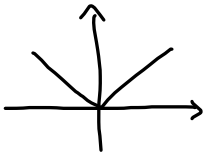



**Regler:**

$(a^x)' = \ln a \cdot a^x \quad , a>0$

$(e^x)' = e^x$

$(|x|)' = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases} = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}$



$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{x}$

**eks.** La $f$ være funksjonen gitt ved

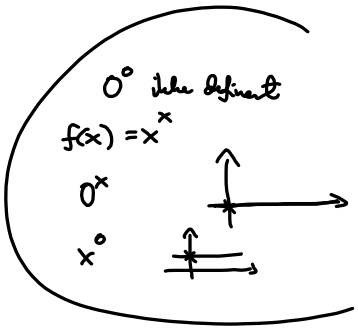
$f(x) = |\sin x|^{\sin x}$

$D_f$ ?

$f'(x)$ ?

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$f'(x) = ?$




**Alt. 1** $f(x) = |\sin x|^{\sin x} = e^{\ln|\sin x|^{\sin x}}$

$= e^{\sin x \ln|\sin x|}$ ....

**Alt. 2.** Logaritmisk derivasjon:

$(\ln|f(x)|)' = \frac{1}{|f(x)|} \cdot \frac{|f(x)|}{f(x)} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

$\boxed{f'(x) = f(x) \cdot (\ln|f(x)|)'}$

$f'(x) = |\sin x|^{\sin x} (\ln|\sin x|^{\sin x})'$

$= |\sin x|^{\sin x} (\sin x \ln|\sin x|)'$

$= |\sin x|^{\sin x} \left( \sin x \frac{1}{|\sin x|} \cdot \frac{|\sin x|}{\sin x} \cdot \cos x + \cos x \cdot \ln|\sin x| \right)$

$= |\sin x|^{\sin x} \cos x \, (1 + \ln|\sin x|)$

Hvis $f$ er deriverbar og forskjellig fra 0 i punktet $x$ så er

$f'(x) = f(x)(\ln|f(x)|)'$.

**Definisjon:**

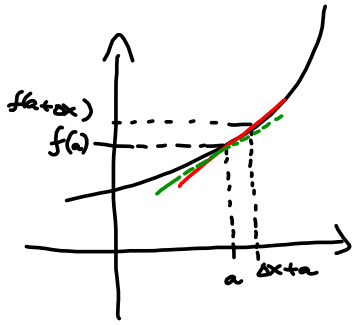
Anta at $f$ er definert i en omegn om punktet $a$ (dvs. et intervall $(a-c, a+c)$ for en $c$).

Hvis grenseverdien

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$ eksisterer

sier vi at $f$ er deriverbar i $a$ og vi skriver

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$




**Eks.** Absoluttverdifunksjonen er ikke deriverbar i 0:

$f(x) = |x|$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & \Delta x \to 0^- \\ 1, & \Delta x \to 0^+ \end{cases}$$

Så gr. verdien eksisterer ikke.

---

Omskrivninger:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (h = x-a)$$

---

**Notasjon:**

$f'(x)$ (Lagrange)

$\frac{df}{dx}$ (Leibniz)

$D[f(x)]$ (Euler)

$\dot{f}(t)$ (Newton)

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x$$

---

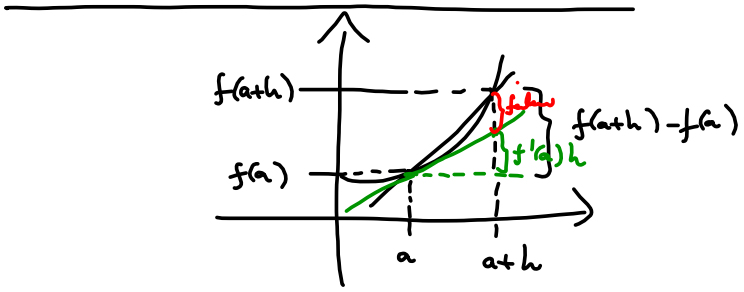
**Setning 6.1.7** Anta at $f$ er deriverbar i $a$.
Da finns en funksjon $\gamma$ slik at

$$\underbrace{f(a+h)-f(a)}_{\text{differanse}} = \underbrace{f'(a)h}_{\text{tilnærming}} + \underbrace{\gamma(h)h}_{\text{feilledd}}.$$

der $\gamma(0)=0$ og $\lim_{h\to 0}\gamma(h)=0$.

Bevis:

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0, & h=0 \\ \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a), & h\neq 0 \end{cases}$$




eks.



En kule med radius $r=10$

Vi øker radien med 0,1.
Hvor mye øker volumet?

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V'(r) = 4\pi r^2$$

$$V(10{,}1)-V(10) \approx V'(10)0{,}1 = 4\pi\, 100\cdot 0{,}1 \approx 120$$

**6.1.9** Hvis $f$ er deriverbar i $a$ så er $f$ kontinuerlig i $a$.

Bevis: Anta at $f$ er der. i $a$.
Vi vil vise at $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Ved 6.1.7: $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{h\to 0}\left(f(a)+f'(a)h+\gamma(h)h\right) = f(a)$ ∎

**Kjerneregelen:**

Anta at $g$ er deriverbar i $a$ og at $f$ er deriverbar i $g(a)$. Da er $f\circ g$ der. i $a$ og

$$(f\circ g)'(a) = f'(g(a))\cdot g'(a)$$

$(f\circ g)(x) = f(g(x))$

**Bevis:** Anta at $g$ er der. i $a$ og at $f$ er der. i $g(a)$.

Vi vil vise at

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{h} = f'(g(a))g'(a).$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(g(a+h))-f(g(a))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f'(g(a))k+\gamma(k)k}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f'(g(a))(g(a+h)-g(a))+\gamma(k)(g(a+h)-g(a))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(f'(g(a))\underbrace{\frac{g(a+h)-g(a)}{h}}_{\to g'(a)} + \gamma(k)\underbrace{\frac{g(a+h)-g(a)}{h}}_{g'(a)}\right)$$

siden $g$ er der. i $a$

$$= \lim_{h\to 0}\left(f'(g(a))\cdot g'(a)+\underbrace{\gamma(k)}_{\to 0}g'(a)\right)$$

$$= f'(g(a))\cdot g'(a) \quad \blacksquare$$

La $k = g(a+h)-g(a)$.

Da er $g(a+h) = g(a)+k$

Vhl 6.1.7:

$f(g(a)+k))-f(g(a)) = f'(g(a))k+\gamma(k)k$

der $\gamma(h)\to 0$ når $k\to 0$ siden $f$ er der. i $g(a)$

## Produktregelen

Anta at $f$ og $g$ er deriverbare i $x$

Da er $fg$ der. i $x$ og

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

Bevis:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(fg)(x+\Delta x) - (fg)(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) \overbrace{- f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x)}^{=0} - f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$f(x+\Delta x) - f(x)$

$g(x+\Delta x) - g(x)$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\big(g(x+\Delta x) - g(x)\big) + \big(f(x+\Delta x) - f(x)\big)g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left( f(x+\Delta x) \underbrace{\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}_{\to g'(x)} + \underbrace{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}_{\to f'(x)} \cdot g(x) \right)$$

$g'(x)$ siden $g$ der. i $x$

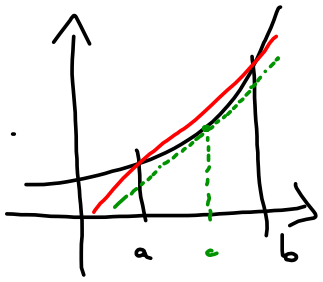
$f'(x)$ siden $f$ der. i $x$

$$= f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \quad \blacksquare$$

## 6.2. Middelverdisetningen (mean value theorem)

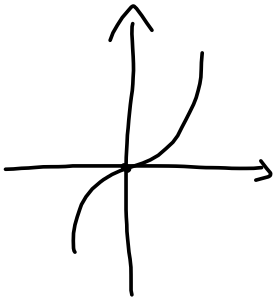
**MVS:** La $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ være kontinuelig og anta at $f$ er deriverbar på $(a,b)$. Da fins $c\in(a,b)$ slik at

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$




**Setning 6.2.1**

Anta at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ har et maks eller min i $c\in(a,b)$. Hvis $f$ er der. i $c$ så er $f'(c)=0$.



**Bevis:** Anta at $f'(c)\neq 0$.

Vi vil vise at $f$ har hverken maks eller min i $c$.

Vi har

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\neq 0$$

så $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\neq 0$ tilstrekkelig nær $c$

Anta at $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0$.

La $x_1>c$. Da har i $\frac{f(x_1)-f(c)}{x_1-c}>0$ gir $f(x_1)-f(c)>0$
så $f(x_1)>f(c)$
dvs. $c$ er ikke maks

($x_1$, $x_2$ tilstrekkelig nær $c$)

La $x_2<c$. Da har i $\frac{f(x_2)-f(c)}{x_2-c}>0$ gir $f(x_2)-f(c)<0$
så $f(x_2)<f(c)$
dvs. $c$ er ikke min

Tilsvarende hvis $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}<0$.

Så hvis $f'(c)\neq 0$ så er $c$ hverken maks eller min. ∎