Forelesning 2, 26. august

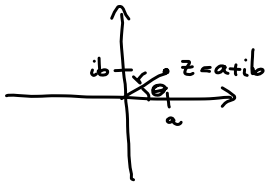
Kap. 3. Komplekse tall

I seksjon 3.1. Anta at vi har et tall i slik at $i^2 = -1$.
Bruker regnereglene fra $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

$a = \mathrm{Re}(z)$, $z = a + ib$ kartesisk form
$b = \mathrm{Im}(z)$
Konjugasjon: $\bar{z}$, $\bar{z} = a - ib$, $\mathrm{Im}(\bar{z}) = -b$

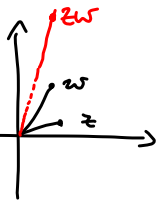
I seksjon 3.2. Vi kan tenke på et komplekst tall som et punkt/en vektor i planet.



Polarkoordinater
Modulus: $r = |z|$
Argument: $\theta = \mathrm{Arg}(z)$, $\theta \in [0, 2\pi)$
$\theta + 2k\pi$ gir samme tall som θ

$z = a + ib$ (algebra) kartesisk form
$= r\cos\theta + i r\sin\theta$ (geometri) polarform

Addisjon geometrisk: vektoraddisjon
Konjugasjon — " — : speiler om førsteaksen
Multiplikasjon geometrisk: vi legger sammen vinklene og multiplisere sammen modulusene



i tilsvarer punktet (0, 1)
i^2 — " — (−1, 0)
så $i^2 = -1$

Vi kan gjøre at for vektorer i planet med vektoraddisjon og multiplikasjon som beskrevet over så gjelder regnereglene i hjemmet fra $\mathbb{R}$:

Kommutativitet: $z + w = w + z$
$zw = wz$

Assosiativitet: $z + (w + u) = (z + w) + u$
$z(wu) = (zw)u$

Distributivitet: $z(w + u) = zw + zu$

Motsatte tall: $-z$ slik at $z + (-z) = 0$
Inverse tall: $\frac{1}{z}$, $z \neq 0$ slik at $z \cdot \frac{1}{z} = 1$

Kan veksle mellom kartesiske- og polarkoordinater og regne i vei.

---

eks. Bruk tallene $z_1 = 3-3\sqrt{3}i$ og $z_2 = 1+i$ til å finne sin og cos til $\frac{23\pi}{12}$.

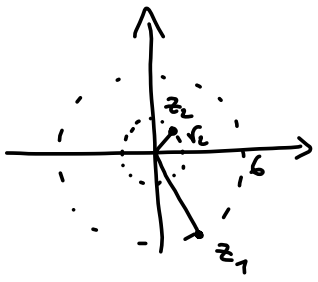
Polarkoordinater:

$|z_1| = \sqrt{3^2+(-3\sqrt{3})^2} = 6$

$\left.\begin{aligned}\cos\theta_1 &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\\ \sin\theta_1 &= \frac{-3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \theta = \frac{5\pi}{3}$

$|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\left.\begin{aligned}\cos\theta_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\} \theta = \frac{\pi}{4}$



$\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{20\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{23\pi}{12}$

Multiplisere:

$z_1 \cdot z_2 = (3-3\sqrt{3}i)(1+i) = 3+3i-3\sqrt{3}i+3\sqrt{3} = 3+3\sqrt{3}+i(3-3\sqrt{3})$

$z_1 \cdot z_2 = \left(6\cos\frac{5\pi}{3} + i\,6\sin\frac{5\pi}{3}\right)\left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + i\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 6\sqrt{2}\cos\frac{23\pi}{12} + i\,6\sqrt{2}\sin\frac{23\pi}{12}$

Realdeler:

$6\sqrt{2}\cos\frac{23\pi}{12} = 3+3\sqrt{3}$

$\cos\frac{23\pi}{12} = \frac{3+3\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Imaginærdeler:

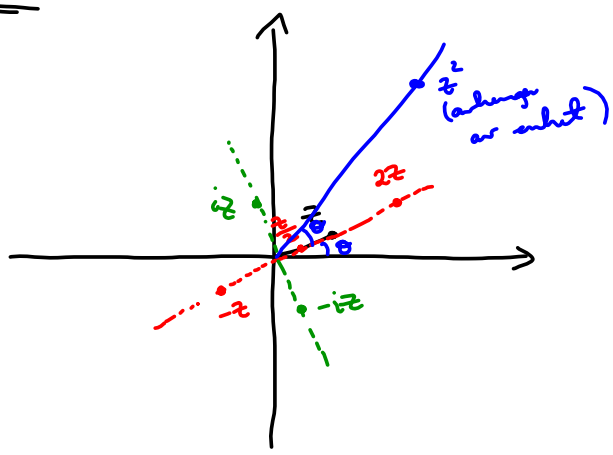
$6\sqrt{2}\sin\frac{23\pi}{12} = 3-3\sqrt{3}$

$\sin\frac{23\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

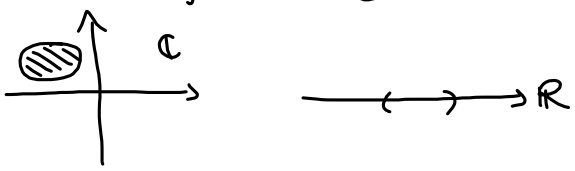
oppg. 3.2.8

Velg z.

Tegn $2z, -z, \frac{z}{2}$, $iz, -iz$ og z^2

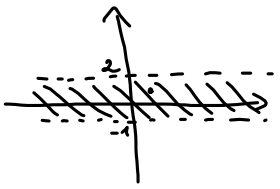


Litt mer om geometrien til $\mathbb{C}$:

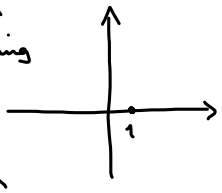


Beskrive områder i $\mathbb{C}$:

$-1 < \mathrm{Im}(z) < 2$



$z < 1$ ikke mening



$z < w$ ikke mening

$|z| < 1$ gir mening



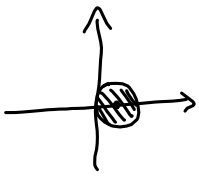
$3+2i < 5+5i$??

Kan bruke reelle tall og ulikheter

$\mathrm{Im}(z)$, $\mathrm{Re}(z)$, $|z|$, $\mathrm{Arg}(z)$

Beskriv området:

eks. $|z-1| \leq 1$



La $z = x+iy$.

$|z-1| \leq 1$

$|x+iy-1| \leq 1$

$|x-1+iy| \leq 1$

$\sqrt{(x-1)^2+y^2} \leq 1$

$(x-1)^2+y^2 \leq 1$

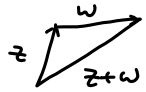
pause til 1814

$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$

Alle punkter på eller innenfor sirkelen med sentrum $(1,0)$ og radius 1.

Geometrisk resultat:

Trekantulikheten:
La $z, w \in \mathbb{C}$. Da er
$$|z+w| \leq |z|+|w|.$$



Geometrisk: "den korteste veien mellom to punkter er den rette linja mellom punktene"

Vise algebraisk: oppgave.

Nyttig: $z = a+ib$

$\bar{z} = a-ib$

$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib)$

$= a^2+b^2 \quad \in \mathbb{R}$

$= |z|^2$

$$z\bar{z} = |z|^2$$

3.3 Komplekse eksponentialer og de Moivres formel

$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}71828\ldots$

e^z ?

Én måte å definere e^z på som oppfyller:

1) $e^{a+0i} = e^a$

2) $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$

Definisjon: La $z = a+ib$. Vi definerer

$$e^z = e^a(\cos b + i\sin b)$$

modulus: e^a
argument: b

1) $e^{a+0i} = e^a(\cos 0 + i\sin 0) = e^a$ ✓

Eks. $e^{i\pi} = e^0(\cos\pi + i\sin\pi) = -1$

$$e^{i\pi}+1=0$$ Eulers formel

Merk!

$e^{ib} = \cos b + i\sin b \quad b\in\mathbb{R}$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \theta\in\mathbb{R}$

$re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$

$z = a+ib$ kartesisk form (algebra)
$= r\cos\theta + ir\sin\theta$ polarform (geometri)
$= re^{i\theta}$ kompakt polarform, eksponentialform (analyse)

2) **Resultat:** $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$

Bevis: La $z = a+ib$ og $w = c+id$.

$e^z \cdot e^w = e^{a+ib}\cdot e^{c+id}$

$= e^a(\cos b + i\sin b)e^c(\cos d + i\sin d)$

modulus: e^{a+c}
argument: $b+d$

$e^{z+w} = e^{(a+c)+i(b+d)}$

$= e^{a+c}(\cos(b+d)+i\sin(b+d))$

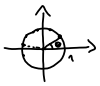
modulus: e^{a+c}
argument: $b+d$

Så $e^z\cdot e^w = e^{z+w}$. ∎

La $n\in\mathbb{N}$.

$(e^z)^n = e^{zn}$ kan vises ved induksjon

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$



$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$
de Moivres formel $(n\in\mathbb{N})$

Eks. $(\cos\theta+i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta)+i\sin(2\theta)$

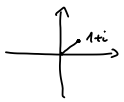
$\cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta)+i\sin(2\theta)$

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ (realdelene)
$\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$ (imaginærdelene)

$z = re^{i\theta}$

$z^n = r^n(e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

Eks. $(1+i)^{804}$



Polarform: $z = 1+i$, $|z| = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

$(1+i)^{804} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{804} = 2^{402}e^{i\,201\pi} = 2^{402}e^{i\pi} = -2^{402}$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{-i\theta} = \cos(-\theta)+i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta = \overline{e^{i\theta}}$

$e^{i\theta}+e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \theta\in\mathbb{R}$

Def. $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \quad z\in\mathbb{C}$

$e^{i\theta}-e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$

$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Def: $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \quad z\in\mathbb{C}$