Forelesning 3. 2/9-26

3.1.10 La $z, w \in \mathbb{C}$. Hvis $z+w$ og $zw \in \mathbb{R}$ så er $z, w \in \mathbb{R}$ eller $z = \bar{w}$.

La $z, w \in \mathbb{C}$.

Bevis: Anta at $z+w \in \mathbb{R}$ og $zw \in \mathbb{R}$.

Vi vil vise at da er $z, w \in \mathbb{R}$ eller $z = \bar{w}$.

La $z = a+ib$ og $w = c+id$.

Vi har

$z+w = (a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$

$zw = (a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(bc+ad)$

Siden disse tallene er reelle, har vi at

$b+d = 0$ og $bc+ad = 0$

Argumentasjon

Dvs gir $b = -d$ og $-dc+ad = 0$

$d(-c+a) = 0$

$d = 0$ eller $c = a$

Som gir 1) $b = -d$ og $d = 0$ eller 2) $b = -d$ og $c = a$

Kladd:

$a+ib+c+id = a+c+i(b+d)$

$(a+ib)(c+id) = ac-bd+i(ad+bc)$

$b+d = 0$ $\Rightarrow$ $ad+bc = 0$

$b = -d$ og $ad+bc = 0$

$-ab+bc = 0$

$b(-a+c) = 0$

$b = 0$ v $a = c$

$b = -d$ og $b = 0$ eller $b = -d$ og $a = c$

$z, w \in \mathbb{R}$ eller $z = \bar{w}$

3.2.10

d) Bestemi denne mengden av komplekse tall geometrisk:

$$\{z \mid |z-2| < |z-i+2|\}$$

$z = x+iy$

$|z-2| < |z-i+2|$

$|x+iy-2| < |x+iy-i+2|$

$|x-2+iy| < |x+2+i(y-1)|$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2} < \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}$$

$(x-2)^2+y^2 < (x+2)^2+(y-1)^2$

$x^2-4x+4+y^2 < x^2+4x+4+y^2-2y+1$

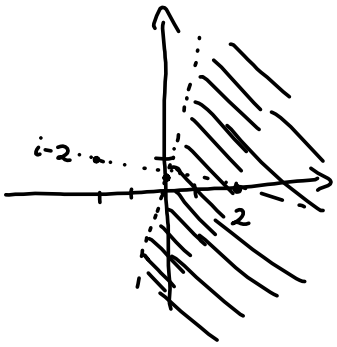
$-8x < -2y+1$

$-2y+1 > -8x$

$y-\frac{1}{2} < 4x$

$y < 4x+\frac{1}{2}$

Punktene som ligger under linja $y = 4x+\frac{1}{2}$.



Fra sist:

$z = a + ib$ (kartesisk form)

$z = r\cos\theta + ir\sin\theta$ (polarform)

$z = re^{i\theta}$ (eksponentialform, kompakt polarform)

$$e^z = e^a(\cos b + i\sin b)$$

Åpner dører:

- de Moivres formel $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$, $n \in \mathbb{N}$
- formler for $\cos(n\theta)$ og $\sin(n\theta)$ (oppgaven)
- regne ut potensen av kompleksse tall
- $\sin z$ og $\cos z$

Nå: • tekkle n-te røtter

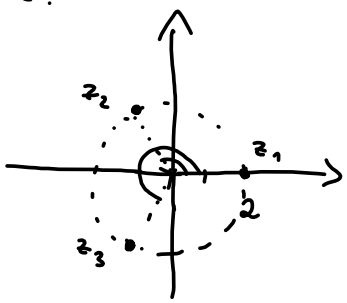
3.4. Trekke n-te røtter av komplekse tall

La $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

En n-te rot av z er en løsning av likningen $w^n = z$.

Eks. For reelle tall: $w^3 = 8$: $w = 2$

For komplekse tall: $w^3 = 8$ de løsninger



Hvordan finne n-te røttene til z?

$z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$

$w_0 = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$ er en n-te rot av z siden $w_0^n = \left(r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n = re^{i\theta} = z$.

kalles n-te prinsipalroten til z

$z = re^{i(\theta + 2\pi k)}$, $k \in \mathbb{Z}$

$w_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)}$ er også en n-te rot siden $w_k^n = z$

Hvordan regne ut n-te røtter?

$z = re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$

$w_0 = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}$

$w_1 = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2\pi}{n}\right)} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{n}} = w_0 \cdot e^{i\frac{2\pi}{n}}$

$w_2 = w_1 e^{i\frac{2\pi}{n}}$

⋮

1) Finner w_0

2) $w_k = w_{k-1} e^{i\frac{2\pi}{n}}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$

Eks: Finn 5. røttene til 1.

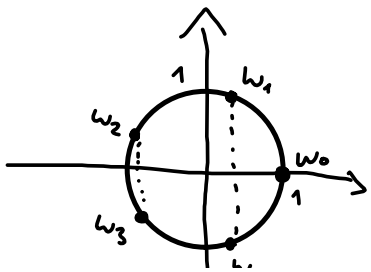
$z = 1 = 1 \cdot e^{i0}$

$w_0 = 1^{\frac{1}{5}} e^{i\frac{0}{5}} = 1$

$w_1 = 1 \cdot e^{i\frac{2\pi}{5}} \left(= \cos\frac{2\pi}{5} + i \sin\frac{2\pi}{5}\right)$

$w_2 = e^{i\frac{2\pi}{5}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{5}} = e^{i\frac{4\pi}{5}}$

$w_3 = e^{i\frac{4\pi}{5}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{5}} = e^{i\frac{6\pi}{5}}$



eks. Finn 4. røttene til $2+2i$

$z = 2+2i$

$|z| = \sqrt{8}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

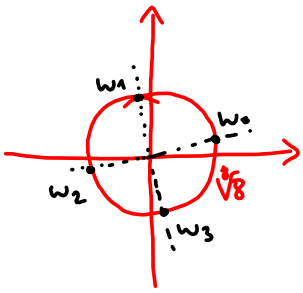
$z = \sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$w_0 = 8^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{\pi}{16}}$

$w_1 = 8^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{\pi}{16}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{4}} = 8^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{9\pi}{16}}$

$w_2 = 8^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{9\pi}{16}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{4}} = 8^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{17\pi}{16}}$

$w_3 = 8^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{17\pi}{16}} \cdot e^{i\frac{2\pi}{4}} = 8^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{25\pi}{16}}$



Kvadratrøtter: $(n=2)$

$z = re^{i\theta}$

Kvadratrøttene til z:

$w_k = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$ prinsippalkvadratroten