Forelesning 4, 9. september

Neste ukes: 2.3 og 4.3

Komplekse tall:

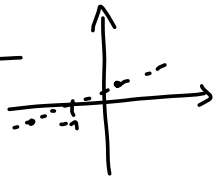
3.4.11 c) $z^2 + 2z - i\sqrt{3} = 0$ komplekst andregradslikning

abc-formelen:

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\sqrt{3}i}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm (\sqrt{6} + i\sqrt{2})}{2}$$

$$= -1 \pm \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$



$\sqrt{4+4\sqrt{3}i}$:

prinsipalkvadratroten

$z = 4 + 4\sqrt{3}i$

$|z| = \sqrt{4^2 + 4^2 \cdot 3} = 8$

$\cos\theta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\sin\theta = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

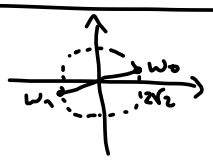
$\Big\} \theta = \frac{\pi}{3}$

$z = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$

$w_0 = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{6}}$

$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$



Reelle andregradslikninger:

$az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

Hvis $b^2 - 4ac < 0$: to løsninger

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$a > 0$

$\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$

røttene er komplekse konjugerte

3.5. Algebraens fundamentalteorem

Definisjon: Et uttrykk på formen

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

der $a_n \neq 0$ kalles et polynom i z av grad n ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$).

Tallene $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ (a_i-ene) kalles koeffisientene til $P(z)$.

Hvis a_i-ene er reelle, kalles polynomet reelt.

Hvis a_i-ene er komplekse, kalles polynomet komplekst.

$$P(z) = 0$$

kalles en algebraisk likning

En løsning på en slik likning kalles en rot (eller et nullpunkt).

eks. $z^5 + iz - 1$ er et komplekst 5. gradspolynom

Konstanter $\neq 0$ er polynomer av grad 0.

Nullpolynomet: grad $-\infty$. $P(z) \cdot 0 = 0$

Algebraens fundamentalteorem

La $P(z)$ være et komplekst polynom av grad n.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

Da finns $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$ slik at

$$P(z) = a_n (z - r_1)(z - r_2) \cdots (z - r_n)$$

for alle komplekse tall z.

Bortsett fra rekkefølgen er r_i-erne entydige.

Merk!

- ikke bevist nå (kap. 5 *-mulig)
- AlgFT sier at r_i-erne finns, men ikke hvordan vi finner dem
- r_i-erne kan godt være like

La $r_1, r_2, \ldots, r_j$ være de ulike røttene til $P(z)$

Da er $P(z) = a_n (z - r_1)^{n_1} (z - r_2)^{n_2} \cdots (z - r_j)^{n_j}$

n_i kalles multiplisiteten til roten r_i

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_j = n$$

$z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2$

eks. Faktorisere

$$P(z) = z^3 + (2-i)z^2 + (1-2i)z - i$$

$(z-r_1)(z-r_2)(z-r_3)$
$= \ldots + (-r_1 r_2 r_3)$

$P(1) \neq 0$

$P(-1) = -1 + 2 - i - 1 + 2i - i = 0$

$(z^3 + (2-i)z^2 + (1-2i)z - i) : (z+1) = z^2 + (1-i)z - i$

$-(z^3 + z^2)$

$(1-i)z^2 + (1-2i)z - i$

$-((1-i)z^2 + (1-i)z)$

$-iz - i$

$-(-iz - i)$

0

$P(1) \neq 0$

$P(-1) = 1 - 1 + i - i = 0$

$(z^2 + (1-i)z - i) : (z+1) = z - i$

$-(z^2 + z)$

$-iz - i$

$-(-iz - i)$

0

$P(z) = (z+1)^2(z-i)$

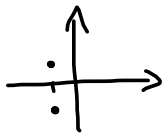
Røtter: -1 med mult. 2
og i med mult. 1

pensum kl 1808

Reelle polynomer:

eks. $z^2 + 2z + 2 = 0$

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = \underline{-1 \pm i}$$



Lemma 3.5.3 La $P(z)$ være et reelt polynom, og la r være en rot i $P(z)$. Da er også $\bar{r}$ en rot i $P(z)$.

Bevis: La $P(z)$ være et reelt polynom og la r være en rot i $P(z)$, dvs. $P(r) = 0$.
Vi vil vise at $P(\bar{r}) = 0$. Da er $\bar{r}$ en rot.

La $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$
der a_i-ene er reelle tall.

$$P(\bar{r}) = a_n \bar{r}^n + a_{n-1} \bar{r}^{n-1} + \ldots + a_1 \bar{r} + a_0$$

Se på
$$\overline{P(r)} = \overline{a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0} = \bar{0}$$
$$= \overline{a_n r^n} + \overline{a_{n-1} r^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 r} + \overline{a_0} = 0$$
$$= \bar{a}_n \bar{r}^n + \bar{a}_{n-1} \bar{r}^{n-1} + \ldots + \bar{a}_1 \bar{r} + \bar{a}_0 = 0 \quad \text{(regneregler for konjugater)}$$
$$= a_n \bar{r}^n + a_{n-1} \bar{r}^{n-1} + \ldots + a_1 \bar{r} + a_0 = 0 \quad \text{(siden } a_i\text{-ene reelle)}$$
$$P(\bar{r}) = 0 \quad \blacksquare$$

Viktig! $(z - r)(z - \bar{r}) = z^2 - zr - z\bar{r} + r\bar{r}$ er et reelt andregradspolynom
$$= z^2 - \underbrace{(r + \bar{r})}_{\in \mathbb{R}} z + \underbrace{r\bar{r}}_{|r|^2 \in \mathbb{R}}$$

Lemma 3.5.4 To konjugerte røtter til samme reelle polynom har samme multiplisitet.

Bevis: La $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ være et reelt polynom av grad n.

La r og $\bar{r}$ være røtter av $P(z)$,

der r har multiplisitet d

og $\bar{r}$ — " ——— j

Vi må vise at $d = j$.

Anta for motsigelse at $d \neq j$.

La $j > d$. (Tilsvarende hvis $d > j$.)

$P(z) = a_n (z-r)^d (z-\bar{r})^j \cdot S(z)$ S er et polynom der r og $\bar{r}$ ikke er røtter

Vi deler $P(z)$ på $(z-r)^d (z-\bar{r})^d$ (et reelt polynom):

Da står vi igjen med polynomet $a_n (z-\bar{r})^{j-d} S(z)$.

Dette er et reelt polynom der $\bar{r}$ er en rot, men

r er ikke en rot, som motsier lemma 3.5.3.

Dermed er $d = j$, så r og $\bar{r}$ har samme multiplisitet. ∎

Korollar 3.5.5 Ethvert reelt polynom av odde grad har en reell rot.

Bevis: La $P(z)$ være et reelt polynom av grad n der n er et oddetall.
Vi vil vise at $P(z)$ har en reell rot.
Anta at $P(z)$ ikke har en reell rot (for motsigelse).
Vi vet at et reelt polynom da har komplekse konjugerte røtter med samme multiplisitet;
$(r_1, \bar{r}_1), (r_2, \bar{r}_2), \ldots, (r_j, \bar{r}_j)$
da r_i har multiplisitet n_i.

$(z-r_1)^{n_1}(z-\bar{r}_1)^{n_1}\ldots$
$(z-r_j)^{n_j}(z-\bar{r}_j)^{n_j}$
$2n_1+\ldots+2n_j$

Det gir $2n_1 + 2n_2 + \ldots + 2n_j = n$
Venstresiden er et partall, som motsier at n er et oddetall, så $P(z)$ har en reell rot. ∎

Oppsummering:
Ethvert reelt n-te gradspolynom kan faktoriseres komplekst i førstegradsfaktorer (ved AlgFT) og den reelle faktoriseringen er i reelle førstegradsfaktorer og reelle andregradsfaktorer (der vi har ganget ut $(z-r)(z-\bar{r})$).

eks. $z^4 - 16$
$= (z^2+4)(z^2-4)$
$= (z^2+4)(z-2)(z+2)$ den reelle faktoriseringen
$= (z-2i)(z+2i)(z-2)(z+2)$ den komplekse faktoriseringen

Pause til 1915