Forelesning 5, 16. september

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

(? over $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, i over $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)

2.3. Kompletthet av reelle tall

La A være en delmengde av $\mathbb{R}$.

Definisjon: En øvre skranke/begrensning av A er et tall $r \in \mathbb{R}$ slik at $r \geq a$ for alle $a \in A$.

En nedre skranke/begrensning — " — $r \leq a$ for alle $a \in A$.

eks: $A = (0,1)$

En øvre skranke av A: $1, 1000, \ldots$

En nedre skranke av A: $-1000, -67, \ldots$

Definisjon: Hvis A har en øvre skranke, er A oppad begrenset.

— " — nedre — " — nedad — " —

Hvis A er både oppad og nedad begrenset, er A begrenset.

Intervaller:

endelig mange tall

- $(-2,3)$ åpent
- $[-2,3]$ lukket
- $(-2,3]$ halvåpent

} begrensede

- $(-2,\infty)$ åpent $(-\infty,-2)$
- $[-2,\infty)$ lukket $(-\infty,-2]$
- $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ både åpent og lukket
- $\varnothing$ både åpent og lukket

Definisjon: Den minste øvre skranken (hvis den fins) til A kalles supremum til A, $\sup A$.

Den største nedre skranken (hvis den fins) til A kalles infimum til A, $\inf A$.

eks: $A = (0,1]$

$\sup A = 1$

$\inf A = 0$

$\sup A$ og $\inf A$ trenger ikke være et element i A

Kompletthetsprinsippet (et aksiom)

Enhver ikke-tom oppad begrenset delmengde A av $\mathbb{R}$ har et supremum. ($\sup A$ fins)

Dette gjelder ikke for $\mathbb{Q}$:

$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$

A er ikke-tom oppad begrenset delmengde av $\mathbb{Q}$

$\sup A$ fins ikke i $\mathbb{Q}$ ($\sqrt{2}$)

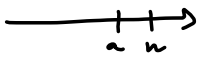
$\mathbb{R}$ (komplett, ingen hull)

$\mathbb{Q}$ ikke komplett (mange hull)

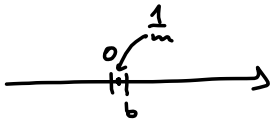
$\mathbb{Q}$ ligger tett i $\mathbb{R}$ (ethvert intervall på $\mathbb{R}$ inneholder et rasjonalt tall)

Arkimedes' prinsipp (2.2.6)

1) For ethvert reelt tall a så fins et naturlig tall n som er større enn a.



2) For ethvert positivt reelt tall b så fins et naturlig tall m slik at $\frac{1}{m}$ er mindre enn b.



Forklaring:

1) skryf desimalene i a og legg til 2

2) bruker 1) til å finne m slik at $m > \frac{1}{b}$ som gir $\frac{1}{m} < b$

($bm > 1$, $b > \frac{1}{m}$)

Setning: Enhver ikke-tom nedad begrenset delmengde A av $\mathbb{R}$ har et infimum ($\inf A$ fins).

Bevis: La A være en ikke-tom nedad begrenset delmengde av $\mathbb{R}$.

fins r slik at $r \leq a$ for alle A

dvs. $-r \geq -a$

La $-A = \{-x \mid x \in A\}$

Da er $-A$ ikke-tom og oppad begrenset, så $-A$ har en sup.

$c = \sup(-A)$ (c er minste øvre skranke til $-A$)

$-c = \inf A$ ($-c$ er største nedre skranke til A). ∎

4.3. Konvergens av følger

pause til 18^{05}

En følge er en oppramsing/liste av tall.

(En følge er en funksjon fra $\mathbb{N}$ til $\mathbb{R}$.) $n \in \mathbb{N}$

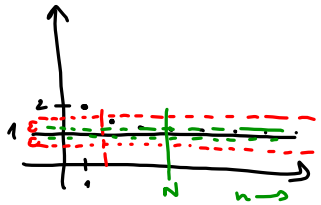
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots$

a_i: i-te tallet

eks. $\left\{\frac{n+1}{n}\right\} = \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$

ser ut til at tallene nærmer seg 1 når n blir større og større

ε epsilon



Definisjon: En følge $\{a_n\}$ konvergerer mot et tall a hvis for hver $\varepsilon > 0$ så finns $N \in \mathbb{N}$ slik at for alle $n \geq N$ så er $|a_n - a| < \varepsilon$.

Vi skriver $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

eks. Vis at $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1$ ved ε-N-definisjonen.

Gitt $\varepsilon > 0$. Vi må vise at det finns $N \in \mathbb{N}$ slik at når $n \geq N$ så er $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$.

Vi ønsker $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{n+1-n}{n}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

La $N > \frac{1}{\varepsilon}$ (N finns ved Arkimedes' prinsipp).

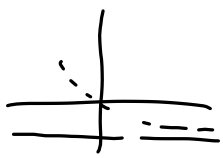
Da har vi at når $n \geq N$ så er $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$

så $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. ∎

Regning:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}_{=0} = 1$$

$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1}\right)$



Regneregler:

Anta at $\{a_n\}$ konvergerer mot a
og at $\{b_n\}$ konvergerer mot b.
Da har vi:

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a+b$

2) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = a-b$

3) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, $b\neq 0$

Bevis: kommer etter hvert, bruker definisjonen

eks. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+4n+1}{5n^4+3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^3}{n^4}+\frac{4n}{n^4}+\frac{1}{n^4}}{\frac{5n^4}{n^4}+\frac{3n}{n^4}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{4}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{5+\frac{3}{n^3}} = \frac{0}{5} = 0$

eks. $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n+3^n}{2\cdot 3^n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{-1}{3}\right)^n+\left(\frac{3}{3}\right)^n}{\frac{2\cdot 3^n}{3^n}-\frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^n+1}{2-\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{2}$

eks. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)^{\infty-\infty} \overset{\text{Alt.2}}{=} \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2\right)^{\infty\cdot 0}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2}{\frac{1}{n}} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{\text{L'H}}{=}} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{4+\frac{1}{n}}}\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{4}$

Alt. 1:

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{4n^2+n}-2n\right)\left(\sqrt{4n^2+n}+2n\right)}{\sqrt{4n^2+n}+2n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+n-4n^2}{\sqrt{4n^2+n}+2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$

pause til 19|2