Forelesning 6 , 23. september

4.3 Konvergens av følger

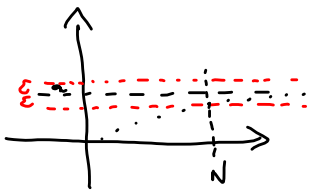
En følge er en funksjon f med definisjonsmengde $\mathbb{N}$ og verdier i $\mathbb{R}$.

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto f(n) = a_n$$

gir følgen $\{a_n\}$.

$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots$$

Følgen $\{a_n\}$ konvergerer mot tallet a hvis for alle $\varepsilon > 0$ så fins $N \in \mathbb{N}$ slik at for alle $n \geq N$ så er $|a_n - a| < \varepsilon$.



Vi skriver $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Hvis $\{a_n\}$ ikke konvergerer mot et tall, så sier vi at $\{a_n\}$ divergerer.

---

3 mulige svar for grenseverdier:

1) et tall (dvs. lim eksisterer)
2) $\pm\infty$ (dvs. lim ikke eksisterer)
3) hopper / oscillerer, dvs. lim ikke eksisterer

---

eks. Vis at $\{(\frac{1}{2})^n\}$ konvergerer mot 0 ved ε-N-definisjonen:

Gitt $\varepsilon > 0$. Vi må vise at det fins $N \in \mathbb{N}$ slik at når $n \geq N$ så er $|(\frac{1}{2})^n - 0| < \varepsilon$.

Vi undersøker

$$(\tfrac{1}{2})^n < \varepsilon$$
$$n \ln(\tfrac{1}{2}) < \ln \varepsilon$$
$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln(\frac{1}{2})} \qquad (\ln \tfrac{1}{2} < 0)$$

La $N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln(\frac{1}{2})}$ (N fins ved Arkimedes' prinsipp).

Da har vi at for alle $n \geq N$ så er $|(\frac{1}{2})^n - 0| < \varepsilon$.

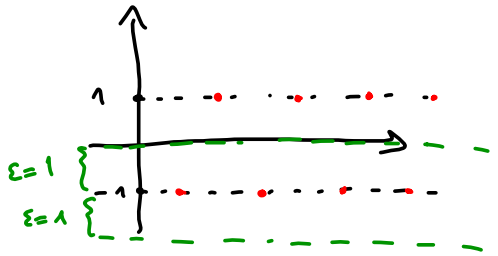
Så dermed er $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$. ∎

Sjekk: $\left[(\frac{1}{2})^n < (\frac{1}{2})^{\frac{\ln \varepsilon}{\ln(\frac{1}{2})}}\right]$ $\quad (n \geq N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln(\frac{1}{2})})$

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln(\frac{1}{2})}$$
$$n \ln(\tfrac{1}{2}) < \ln \varepsilon$$
$$\ln(\tfrac{1}{2})^n < \ln \varepsilon$$
$$(\tfrac{1}{2})^n < \varepsilon$$

Hva betyr det at $\{a_n\}$ ikke konvergerer mot a.

eks: $\{(-1)^n\} = -1, 1, -1, 1, \ldots$
konvergerer ikke mot -1



Følgen $\{a_n\}$ konv. mot a hvis for alle $\varepsilon > 0$ så finns $N \in \mathbb{N}$ slik at for alle $n \geq N$ så er $|a_n - a| < \varepsilon$.

$\forall$ for alle : universelt kvantor

$\exists$ det finns : eksistensielt kvantor

kort: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N \; |a_n - a| < \varepsilon$

Følgen $\{a_n\}$ konv. ikke mot a hvis :

$\exists \varepsilon > 0 \, \forall N \in \mathbb{N} \, \exists n \geq N \; |a_n - a| \geq \varepsilon$

det finns $\varepsilon > 0$ slik at for alle $N \in \mathbb{N}$ så finns $n \geq N$ slik at $|a_n - a| \geq \varepsilon$.

eks: $\{(-1)^n\}$ konv. ikke mot -1 :

da $\varepsilon = 1$. for alle $N \in \mathbb{N}$ finns $n \; (= 2N)$ slik at $|(-1)^n - (-1)| = |(-1)^{2N} + 1| = 1 + 1 \geq 1 = \varepsilon$

til 18^{10} (ca) pause

Rekursiv formel: hvordan ta stilling til konvergens?

Definisjon: En følge $\{a_n\}$ kalles voksende hvis

$a_{n+1} \geq a_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

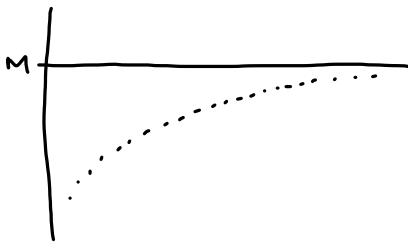
— " — avtagende — " —

$a_{n+1} \leq a_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Hvis $a_{n+1} > a_n$: strengt voksende

$a_{n+1} < a_n$: strengt avtagende

Monoton følge: enten voksende eller avtagende.



Definisjon: En følge $\{a_n\}$ er oppad begrenset hvis det fins $M \in \mathbb{R}$ slik at

$a_n \leq M$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

— " — nedad — " —

— " —

$a_n \geq M$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Begrenset følge: både oppad og nedad begrenset.

Teorem 4.3.9

Enhver begrenset monoton følge er konvergent.

Bevis: Vi vil vise at enhver oppad begrenset voksende følge er konvergent.

La $\{a_n\}$ være en oppad begrenset voksende følge.

La $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Da er A ikke-tom, oppad begrenset delmengde av $\mathbb{R}$, så $\sup A$ fins (ved KP).

La $a = \sup A$.

Vi vil vise at $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Gitt $\varepsilon > 0$. Vi må vise at det fins $N \in \mathbb{N}$ slik at for alle $n \geq N$ så er $|a_n - a| < \varepsilon$.

Det fins $N \in \mathbb{N}$ slik at $a_N > a - \varepsilon$

siden a er $\sup A$ (ellers ville $a-\varepsilon$ vært en mindre skranke)

Vi vet at hvis $n \geq N$ så er $a_n \geq a_N$ siden $\{a_n\}$ er voksende.

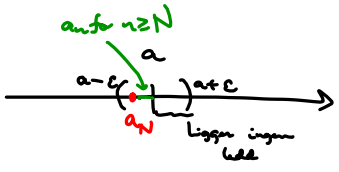
Dermed har vi at $|a_n - a| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$. ∎

Kompletthetsprinsippet (forsist)

Enhver ikke-tom oppad begrenset delmengde av $\mathbb{R}$ har en minste øvre skranke.

$(A ; \sup A)$

$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots$



eks. La $\{a_n\}$ være gitt ved

$$a_{n+1} = \frac{3a_n+1}{a_n+3}, \quad a_1 = 0, \quad n \geq 1$$

$\frac{2}{\frac{10}{3}}$

a) Vis at $0 \leq a_n < 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$. $0, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \ldots$

b) Vis at $\{a_n\}$ er voksende.

c) Vis at $\{a_n\}$ er konvergent og finn grenseverdien.

---

a) $a_n \geq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$

Vi viser $a_n < 1$ ved induksjon:

1) $a_1 = 0 < 1$ så påstanden er sann for $n = 1$

2) Anta at $a_n < 1$ for en $n \in \mathbb{N}$

Vi vil vise at da er $a_{n+1} < 1$.

$$a_{n+1} = \frac{3a_n+1}{a_n+3}$$

Vi ser på $a_{n+1} - 1$:

$\frac{a}{c} - 1 = \frac{a-c}{c}$

$$\frac{3a_n+1}{a_n+3} - 1 = \frac{3a_n+1-a_n-3}{a_n+3} = \frac{2a_n-2}{a_n+3} = \frac{2(a_n-1)}{a_n+3} < 0$$

siden $a_n < 1$

så $a_{n+1} < 1$ og påstanden $a_n < 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$ er vist ved induksjon.

b) $\{a_n\}$ er voksende:

Må vise at $a_{n+1} \geq a_n$

dvs. $\frac{3a_n+1}{a_n+3} - a_n \geq 0$

$$\frac{3a_n+1-a_n(a_n+3)}{a_n+3} = \frac{3a_n+1-a_n^2-3a_n}{a_n+3} = \frac{1-a_n^2}{a_n+3} \geq 0 \quad \text{siden } a_n < 1$$

så følgen er voksende

c) Siden $\{a_n\}$ er voksende og oppad begrenset (av 1), så er følgen konvergent. La $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

$$\frac{3a_n+1}{a_n+3} = a_{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3a_n+1}{a_n+3} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

$$\frac{3a+1}{a+3} = a$$

$$3a+1 = a^2+3a$$

$$a^2 = 1$$

$$a = \pm 1$$

Siden $a_n \geq 0$, er $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

pause til 1915

GOD HØSTFERIE!