Forelesning 7, 7. oktober

Regnelørdag 17. oktober kl. 10-16

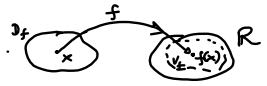
Oblig innlevres 21. oktober

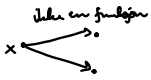
Kap. 5. Kontinuerlige funksjoner

En funksjon er en regel som til hvert element x i en mengde D_f gir ett, og bare ett, element $f(x)$ i en annen mengde.

Notasjon: $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$

der $D_f \subset \mathbb{R}$, dvs. vi skal se på funksjoner i én reell variabel med reelle verdier.





En funksjon er gjerne gitt ved en formel, dvs. $f(x) = \ldots$ (uttrykk), eventuelt

$$f(x) = \begin{cases} \cdots & \text{delt forskrift, dvs.} \\ \cdots & \text{ulike uttrykk på} \\ \cdots & \text{ulike intervaller} \end{cases}$$

D_f: definisjonsmengden til f

Hvis ikke D_f er oppgitt, er dette mengden av de x slik at $f(x)$ gir mening (er definert).

NB! $f \neq f(x)$

"Funksjonen $f(x)$" gir ikke mening ($f(x)$ er en funksjonsverdi).

Vi kan skrive: La f være funksjonen gitt ved $f(x) = \ldots$

$(< \leq)$ $\subseteq$ $\subset$ $\in$

$$V_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$$

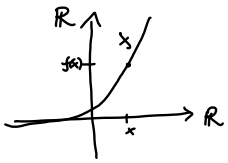
Definisjon: En funksjon fra mengden A til mengden B er mengden av par (a, b) der $a \in A$ og $b \in B$ slik at for hver $a \in A$ finnes kun ett par (a, b).

(ikke så veldig nyttig for oss nå)

Grafen til f:

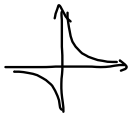
$$\{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$$

$D_f \subset \mathbb{R}$ $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$



eks. $f(x) = \frac{1}{x}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



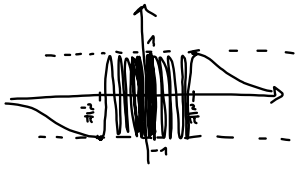


eks. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$V_f = [-1, 1]$

studieinfo@math.uio.no



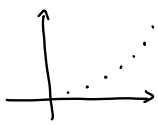
$0 < x < \frac{\pi}{2}$

"$\frac{1}{0} > \frac{1}{x} > \frac{2}{\pi}$"

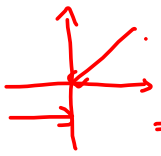
eks. Tallfølger er funksjoner:

$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$n \longmapsto a_n = f(n)$



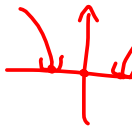
Er følgende funksjoner kontinuerlige?
Hva tror/vet dere?

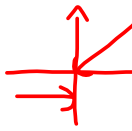
① $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$  Nei

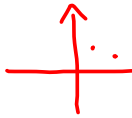
② $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  Nei

③ $f(x) = x^2$  Ja

④ $f(x) = \frac{1}{x}$  Ja

⑤ $f(x) = \sqrt{x^2(x^2-1)}$  Ja

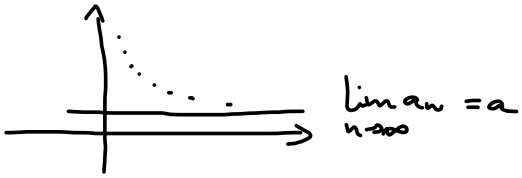
⑥ $f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$  Ja

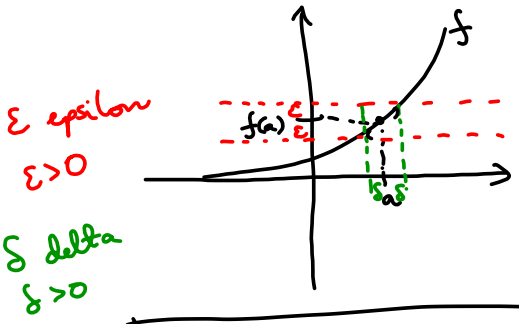
⑦ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \frac{1}{n}$  Ja

Pause til 18:11

Kontinuitet i et punkt:

$\left(\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \right)$

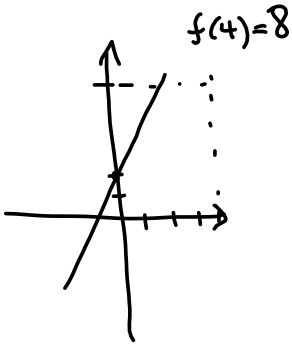




"Vi ønsker at funksjonsverdiene
nærmer seg f(a) når x nærmer seg a."

En funksjon f er kontinuerlig i punktet $a \in D_f$
hvis for hver $\varepsilon > 0$ så fins $\delta > 0$ slik at
for alle $x \in D_f$ slik at $|x-a| < \delta$ så er $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

eks. La f vare funksjonen gitt ved $f(x) = \frac{3}{2}x + 2$.
Vis at f er kontinuerlig i punktet $x=4$ ved ε-δ-definisjonen.
Gitt $\varepsilon > 0$. Vi må vise at det fins $\delta > 0$ slik at for
alle $x \in \mathbb{R}$ slik at $|x-4| < \delta$ så er $|f(x)-f(4)| < \varepsilon$.



Vi ønsker $|f(x)-f(4)| < \varepsilon$:

$$|f(x)-f(4)| = \left|\frac{3}{2}x+2-8\right| = \left|\frac{3}{2}x-6\right|$$
$$= \frac{3}{2}|x-4|$$

Når $|x-4| < \delta$ så er $|f(x)-f(4)| = \frac{3}{2}|x-4| < \frac{3}{2}\delta$

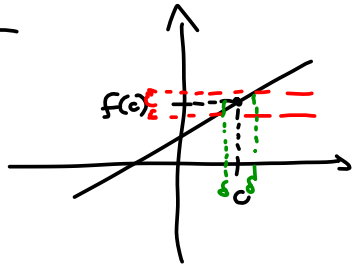
Hvis $\frac{3}{2}\delta = \varepsilon$

$\delta = \frac{2}{3}\varepsilon$

La $\delta = \frac{2}{3}\varepsilon$. Da er $|f(x)-f(4)| < \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon$ når
$|x-4| < \delta$. Så f er kontinuerlig i $x=4$.

$f(x) = ax+b$

Gitt $\varepsilon > 0$. La $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$.



eks.: Vis at $f(x)=x^2$ er kontinuelig i punktet 2 ved ε-δ-definisjonen.

Gitt $\varepsilon>0$. Vi må vise at det finns $\delta>0$ slik at for alle $x\in\mathbb{R}$ slik at $|x-2|<\delta$ så er $|f(x)-f(2)|<\varepsilon$.

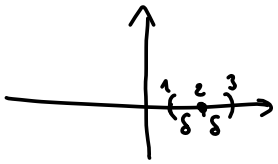
Vi vil oppfylle $|f(x)-f(2)|<\varepsilon$:

$$|f(x)-f(2)| = |x^2-4| = |x-2|(x+2|$$

Hvis $|x-2|<\delta$ så er $|x-2||x+2|<\delta|x+2|$

La $\delta<1$. Da er $|x-2|<1$, dvs. $1<x<3$

så $3<x+2<5$. Dvs. $|x-2||x+2|<5\cdot 5$.



$$\delta\cdot 5=\varepsilon$$
$$\delta=\frac{\varepsilon}{5}$$

La $\delta=\min(1,\frac{\varepsilon}{5})$. Da har vi at når $|x-2|<\delta$ så er $|f(x)-f(2)|<\varepsilon$:

1) Hvis $\delta=1$, dvs. $\varepsilon\geq 5$
   så er $|f(x)-f(2)|=|x-2||x+2|<1\cdot 5\leq\varepsilon$
2) Hvis $\delta<1$, dvs. $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$
   så er $|f(x)-f(2)|=|x-2||x+2|<\frac{\varepsilon}{5}\cdot 5=\varepsilon$

Så $f(x)=x^2$ er kont. i $x=2$.

Setning 5.1.5

Anta at f, g er kontinuerlige i a.
Da er $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ og $\frac{f}{g}$ kontinuerlig i a.
$(g(a) \neq 0)$

Bevis: bruker ε-δ-def.

Setning 5.1.7

Anta at g er kont. i a og at f er kont. i $g(a)$.
Da er $f \circ g$ kont. i a.

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Def: En funksjon f er kontinuerlig hvis f er kont. for alle $a \in D_f$.

Kan bruke: Potensfunksjoner, logaritmefunksjoner, eksponentialfunksjoner, trigonometriske funksjoner, polynomfunksjoner er kontinuerlige.

} her er det en del å bevise

Konsekvens:

Funksjoner gitt ved en kombinasjon av funksjoner vi vet er kont., er kont.

eks: $f(x) = \frac{3\ln x + \sqrt{x}}{\sin x}$ er kont.

