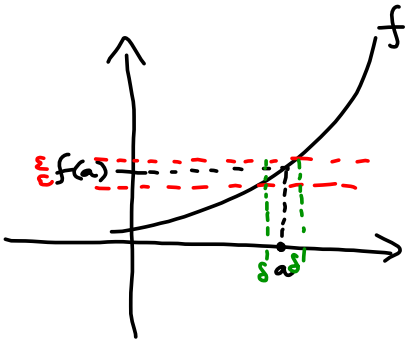
14. oktober, forelesning 8

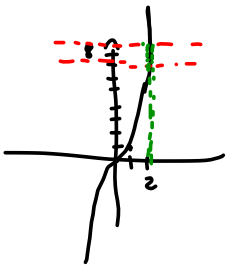
Regnelørdag kl. 10–16.

Kap. 5 Kontinuerlige funksjoner

Definisjon: La f være en funksjon, $a \in D_f$.
f er kontinuerlig i punktet a hvis
for hver $\varepsilon > 0$ så fins $\delta > 0$ slik at
for alle $x \in D_f$ slik at $|x-a| < \delta$ så er
$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

"ε-δ-definisjonen"





opg. 5.1.5

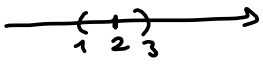
b) Vis at $f(x) = x^3$ er kontinuerlig i punktet 2 ved ε-δ-definisjonen.

Gitt $\varepsilon > 0$. Vi må vise at det fins $\delta > 0$ slik at for alle $x \in \mathbb{R}$ slik at $|x-2| < \delta$ så er $|x^3 - 8| < \varepsilon$.

Vi undersøker $|x^3-8| < \varepsilon$

$|x-2||x^2+2x+4| < \varepsilon$

$x^3 - 8 : x - 2 = x^2 + 2x + 4$
$-(x^3 - 2x^2)$
$2x^2 - 8$
$-(2x^2 - 4x)$
$4x - 8$
$-(4x - 8)$
0



Hvis $\delta < 1$ så er

$|x-2||x^2+2x+4| < \delta \cdot 19$

$2x + 2$
$1 < x < 3$
$7 < x^2 + 2x + 4 < 19$

La $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{19})$. Da har vi at når $|x-2| < \delta$, så er $|x^3-8| < \varepsilon$:

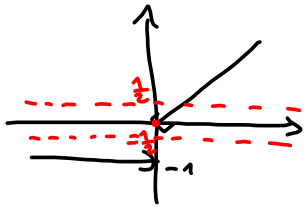
Hvis $\delta = 1$: Dvs. $\varepsilon \geq 19$.
Da er $|x^3-8| = |x-2||x^2+2x+4| < 1 \cdot 19 \leq \varepsilon$

Hvis $\delta = \frac{\varepsilon}{19}$, dvs. $\varepsilon < 19$
Da er $|x^3-8| = |x-2||x^2+2x+4| < \frac{\varepsilon}{19} \cdot 19 = \varepsilon$

Så x^3 er kontinuerlig i $x = 2$.

Diskontinuitet:

eks. $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$



En funksjon f er ikke kontinuerlig (diskontinuerlig) i $a \in D_f$ hvis det finns $\varepsilon > 0$ slik at for alle $\delta > 0$ finns $x \in D_f$ slik at $|x-a| < \delta$ og $|f(x)-f(a)| \geq \varepsilon$.

Med kvantorer ($\forall$ for alle, $\exists$ det finns):

Kont. i a: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D_f \; |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$

Diskont. i a: $\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x \in D_f \; |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \geq \varepsilon$

---

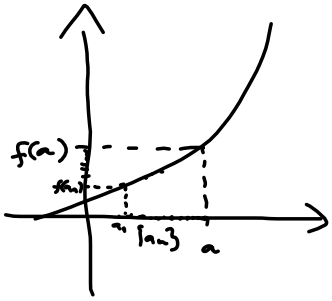
eks. $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

er diskont. i 0:

La $\varepsilon = \frac{1}{2}$ og la $\delta > 0$. Da finns $x = -\frac{\delta}{2}$ slik at $|x-0| < |-\frac{\delta}{2}-0| = \frac{\delta}{2} < \delta$ og $|f(x)-f(0)| = |-1-0| = 1 \geq \varepsilon \; (= \frac{1}{2})$.

Setning 5.1.10

f er kontinuerlig i a $\iff$ $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ for alle følger $\{a_n\}$ slik at $\lim_{n\to\infty} a_n = a$



eks. $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



er ikke kontinuerlig i $x=0$

Finn en følge $\{a_n\}$ slik at $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

men $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq 0$.

pause til 18:13

$\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ $\{f(a_n)\} = \{\sin n\}$ konv. ikke

$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right\}$ $\{f(a_n)\} = \{\sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi)\} = \{1\}$

$\Rightarrow$ (direkte)

Bevis: Anta at f er kont. i a.
Vi må vise at for alle følger $\{a_n\}$ som konv. mot a, så vil $\{f(a_n)\}$ konv. mot $f(a)$.

La $\{a_n\}$ være en følge som konv. mot a. Vi vil vise at $\{f(a_n)\}$ konv. mot $f(a)$.

Gitt $\varepsilon > 0$. Vi må vise at det fins $N \in \mathbb{N}$ slik at for alle $n \geq N$ så er $|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$.

Siden f er kont. i a så fins $\delta > 0$ slik at for alle $x \in D_f$ slik $|x-a| < \delta$ så er $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

Vi vet også at $\{a_n\}$ konv. mot, så fins $N \in \mathbb{N}$ slik at for alle $n \geq N$ så er $|a_n - a| < \delta$.

Da vil $|f(a_n)-f(a)| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$.

$\Leftarrow$ (kontrapositivt):

Anta at f ikke er kontinuerlig i a.

Vi vil vise at det fins en følge $\{a_n\}$ som konv. mot a, men den $\{f(a_n)\}$ ikke konv. mot $f(a)$.

Siden f ikke er kont. i a fins $\varepsilon > 0$ slik at for alle $\delta > 0$ fins $x \in D_f$ slik $|x-a| < \delta$ og $|f(x)-f(a)| \geq \varepsilon$.

La $\delta = \frac{1}{n}$. Da fins $a_n \in D_f$ slik at $|a_n - a| < \delta = \frac{1}{n}$ og $|f(a_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ for alle n.

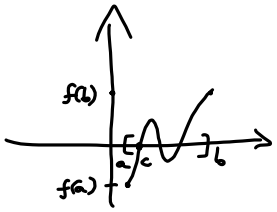
Da vil $\{a_n\}$ konv. mot a men $\{f(a_n)\}$ konv ikke mot $f(a)$. ∎

$a_1 : |a_1 - a| < 1$
$a_2 : |a_2 - a| < \frac{1}{2}$
$a_3 : |a_3 - a| < \frac{1}{3}$

5.2. Skjæringssetningen

5.2.1 Skjæringssetningen

Anta at $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig.
Anta også at $f(a)$ og $f(b)$ har motsatt fortegn ($f(a)f(b)<0$).
Da finnes $c \in (a,b)$ slik at $f(c)=0$.



(intermediate value theorem)

Skjæringssetningen gjelder ikke for $\mathbb{Q}$:

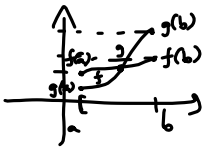
$f(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{Q}$

$f(0) = -2 < 0$

$f(2) = 2 > 0$

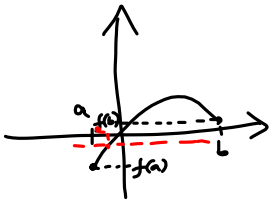
$f(\sqrt{2}) = 0$, men $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Korollar: Anta at $f, g:[a,b] \to \mathbb{R}$ er to kontinuerlige funksjoner og anta at $f(a) > g(a)$ og $f(b) < g(b)$.
Da finnes $c \in (a,b)$ slik at $f(c) = g(c)$.



Bevis: La $h(x) = f(x) - g(x)$.
Da er h kont.
$h(a) = f(a) - g(a) > 0$
$h(b) = f(b) - g(b) < 0$
Ved skjæringssetningen finnes $c \in (a,b)$ slik at $h(c) = 0$,
dvs. $f(c) = g(c)$. ∎

Mellomverdisetningen:
Anta at $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig.
Da har vi at for hver k mellom $f(a)$ og $f(b)$ finnes $c \in (a,b)$ slik at $f(c) = k$.



Bevis: oppg.

Eks. 2^x og x^2

$2^x = x^2$ hvor mange løsninger?

$x = 2$
$x = 4$

Intervallet $[-2,0]$:

$2^{-2} = \frac{1}{4}$ $\quad (-2)^2 = 4$
$2^0 = 1$ $\quad 0^2 = 0$

Skjæringssetn. gir at det finnes en løsning i $[-2,0]$

pause til 19¹⁵