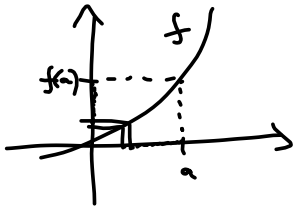
21. oktober, forelesning 9

5.2. Skjæringssetningen

Anta at $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig.
Anta at $f(a)$ og $f(b)$ har motsatt fortegn.
Da finnes det $c \in (a,b)$ slik at $f(c) = 0$.

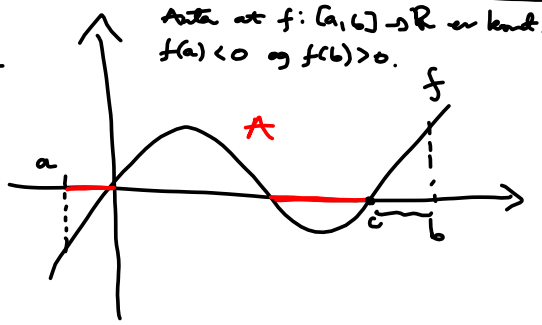


Komplettheitsprinsippet:
Enhver ikke-tom oppad begrenset delmengde av $\mathbb{R}$ har en minste øvre skranke.

f er kont. i a
$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$
for alle følger $\{a_n\}$ som konvergerer mot a

Bevis:

Anta at $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ er kont. og at $f(a) < 0$ og $f(b) > 0$.

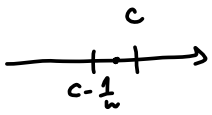


La $A = \{ x \in [a,b] \mid f(x) \leq 0 \}$.
A er ikke-tom og oppad begrenset, så $\sup A$ finnes ved Kp.

$A = [2,3]$
$\sup A = 3$

La $c = \sup A$. Vi vil vise at $f(c) = 0$.

$f(c) \geq 0$: La $\{x_n\}$ være følgen der $x_n = c + \frac{1}{n}$ og $x_n \leq b$.
Da vil $\{x_n\}$ konvergere mot c og siden f er kont. vil $\{f(x_n)\}$ konv. mot $f(c)$.
Siden $f(x_n) \geq 0$ vil $f(c) \geq 0$.



$f(c) \leq 0$: La $\{y_n\}$ være følgen der $c - \frac{1}{n} \leq y_n \leq c$ og $y_n \in A$.
Da vil $\{y_n\}$ konv. mot c og siden f er kont. vil $\{f(y_n)\}$ konv. mot $f(c)$.
Siden $f(y_n) \leq 0$ vil $f(c) \leq 0$.

Så $f(c) \geq 0$ og $f(c) \leq 0$, dvs. $f(c) = 0$.

Gitt et kvadrat med areal A.

Vis at det finns en sirkel med areal A.

Argumenter ved hjelp av skjæringssetningen.



(finn en funksjon og et intervall å bruke skjæringssetningen på)

La r være radius i den innerste sirkelen til kvadratet.

La R — " — omskrevne — " —

Se på $f : [r, R] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \pi x^2 - A$.

Da er f kontinuerlig.

$f(r) = \pi r^2 - A < 0$

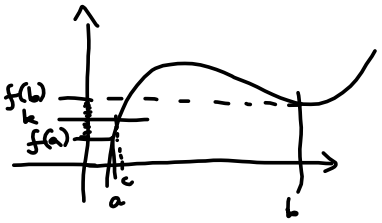
$f(R) = \pi R^2 - A > 0$

Ved skjæringssetningen finns c slik at $f(c) = 0$, dvs. $\pi c^2 - A < 0$, $\pi c^2 = A$.

Mer bruk av skjæringssetningen:

Mellomverdisetningen: (intermediate value theorem)

Anta at $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig.
Da har vi at for hver k mellom $f(a)$ og $f(b)$ finns $c \in (a,b)$ slik at $f(c) = k$.



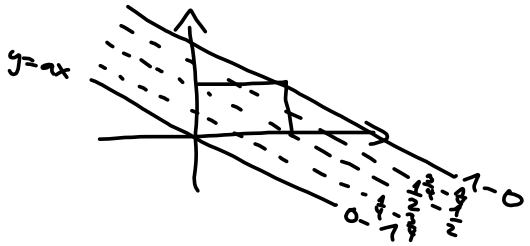
Bevis: La $g(x) = f(x) - k$.

Vi har enten $f(a) < k < f(b)$ eller $f(b) < k < f(a)$.
I begge tilfeller har $g(a)$ og $g(b)$ motsatt fortegn.
g er kontinuerlig.
Skjæringssetningen gir at det finns $c \in (a,b)$ slik at $g(c) = 0$, dvs. $f(c) = k$. ∎

eks.



Bruk rette linjer til å dele rektangelet i 4 like store deler.
På hvor mange måter kan vi gjøre dette?



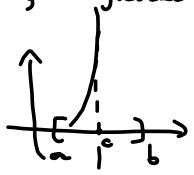
5.3. Ekstremalverdisetningen

Definisjon: La $f: A \to \mathbb{R}$ være en funksjon.
Vi sier at f er *begrenset* hvis det finns $M \in \mathbb{R}$ slik at $|f(x)| \leq M$ for alle $x \in A$.

eks. $f(x) = \sin x$ er begrenset på $\mathbb{R}$ siden $|\sin x| \leq 1$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Setning 5.3.2 Anta $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig.
Da er f begrenset.

Hvorfor?



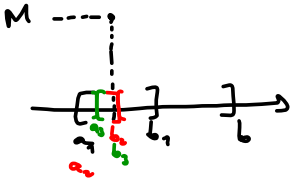
Definisjon: La $f: D_f \to \mathbb{R}$ være en funksjon.
Punktet a kalles et globalt maksimum hvis $f(a) \geq f(x)$ for alle $x \in D_f$.
— " — minimum — " —
$f(a) \leq f(x)$ — " — .

eks. La $f: (0,1) \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = x$.
Finn maksimum og minimum til f.
f har hverken maks eller min

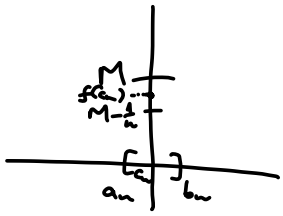
Ekstremalverdisetningen:

Anta at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig.
Da har f både et maksimum og et minimum.

Bevis: Anta at $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ er kontinuerlig.
Vi vil vise at f har et maksimum.
Vi vet at f er begrenset og V_f er ikke-tom,
så $\sup V_f$ finns. La $M=\sup V_f$.
Vi vil vise at det finns $c\in[a,b]$ slik at $f(c)=M$.



Vi lager en kjede av delintervaller
$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\dots\dots$
der V_f har sup like M på hvert delintervall.
Dette gjøres ved å halvere det foregående intervallet
og velge den delen eller en av delene der V_f har
sup lik M.
Dette gir to følger $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$.
$\{a_n\}$ er voksende og oppad begrenset, dermed konvergent.
La $c=\lim_{n\to\infty} a_n$. $\{b_n\}$ konvergerer også mot c siden i
halveres delintervallene.
Siden V_f har sup lik M på hvert delintervall kan
vi lage følgen $\{c_n\}$ der $c_n\in[a_n,b_n]$ slik at $f(c_n)\geq M-\frac{1}{n}$.



Siden $a_n\leq c_n\leq b_n$ for alle n, vil $\lim_{n\to\infty} c_n=c$.
Siden f er kontinuerlig er $\lim_{n\to\infty} f(c_n)=f(c)$.
Vi har også at $\lim_{n\to\infty} f(c_n)=M$, så $f(c)=M$. ∎

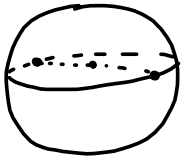
Oppgave:

Anta at jorda er en kuleflate.

Vis at for hvert gitt tidspunkt finns

* to antipodale punkter på ekvator med eksakt samme temperatur.

(* ligger lengst mulig fra hverandre på en sirkel)



studieinfo@math.uio.no