UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100U — Kalkulus
Eksamensdag:	Tirsdag 29. april 2014
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Svarark, formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen inneholder 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er kun ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen inneholder oppgaver der du må begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. I denne delen er poengsummen angitt for hvert delspørsmål. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktige!

DEL 1

SVARENE I DENNE DELEN SKAL FØRES INN PÅ DET VEDLAGTE SVARARKET SOM LEVERES SAMMEN MED RESTEN AV BESVARELSEN.

Oppgave 1. (3 poeng) La $f(x, y) = xe^{xy}$. Da er $\frac{\partial f}{\partial x}$ lik

A) $x^2 e^{xy}$
B) $e^{xy}(1 + x^2)$
C) $e^{xy}(1 + xy)$
D) xye^{xy}
E) $e^{xy}(1 + x)$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2. (3 poeng) Hvis A er en 2×3-matrise og B er en 2×4-matrise, så er $B^T A$

A) en 3×4-matrise
B) en 4×3-matrise
C) en 2×2-matrise
D) en 2×4-matrise
E) ikke definert

Oppgave 3. (3 poeng) Vi har en temperaturfunksjon $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$T(x, y, z) = -x^2 y + zx$$

I hvilken retning øker temperaturen raskest i punktet $(1, 1, 1)$?
A) $(1, -1, 1)$
B) $(1, -1, -1)$
C) $(-1, 1, -1)$
D) $(-1, -1, 1)$
E) $(-1, -1, -1)$

Oppgave 4. (3 poeng) Finn det bestemte integralet

$$\int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2)(\arctan^2 x + 1)}\, dx$$

A) 1
B) $\arctan \frac{\pi}{6}$
C) $\arctan \frac{\pi}{4}$
D) $-\frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{4}$
E) $-\ln \frac{\pi}{4}$

Oppgave 5. (3 poeng) Løs likningen

$$\begin{vmatrix} x & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & x & 0 \\ x - 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

A) $x = 1$ og $x = -2$
B) $x = -1$ og $x = 2$
C) $x = -1 \pm \sqrt{7}$
D) $x = -1 \pm \sqrt{7}$
E) $x = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 6. (3 poeng) Finn $f'(x)$ når

$$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{2t}{t^2+1}\, dt$$

A) $\ln(x^2)$
B) $\frac{2x}{x^2+1}$
C) $\frac{4x^3}{x^4+1}$
D) $2x^3 \arctan x$
E) $\frac{2x^2}{x^4+1}$

Oppgave 7. (3 poeng) Jacobimatrisen til $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (\arctan(xy), \sin(yz))$$

i punktet $(1,-1,0)$ er

A) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Oppgave 8. (3 poeng) La $r \in \mathbb{R}$. For hvilke r konvergerer integralet

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt[3]{e^x}}{e^{rx}}\, dx$$

A) $r > \frac{1}{6}$
B) $r > \frac{1}{3}$
C) $r \geq \frac{1}{3}$
D) $r < \frac{1}{6}$
E) $r < \frac{1}{3}$

Oppgave 9. (3 poeng) La A være en invertibel matrise slik at

$$(7A)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Da er A matrisen lik

A) $\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & 1 \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -1 \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & -1 \\ -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 10. (3 poeng) Finn grenseverdien

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^x t^{1+t}\, dt}{x^2}.$$

A) 0
B) $\frac{1}{2}$
C) 1
D) $\frac{e}{2}$
E) ∞

OPPGAVESETTET FORTSETTER MED DEL 2 PÅ NESTE SIDE

(Fortsettes på side 5.)

DEL 2

HUSK AT I DENNE DELEN MÅ DU BEGRUNNE ALLE SVARENE DINE!

Oppgave 11. (10 poeng) La $0 \leq a \leq 1$, og la $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = (x-a)^2+1$. Hvilken verdi av a gir minst volum av omdreiningslegemet vi får når vi dreier området under grafen til f (og over x-aksen) om y-aksen?

Oppgave 12.

a) (10 poeng) Finn en delbrøkoppspalting av uttrykket

$$\frac{1}{(u^2+4)(u+4)}$$

b) (10 poeng) Finn det bestemte integralet

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin^2 x + 4)(\sin x + 4)}\, dx$$

Oppgave 13. La $z \in \mathbb{C}$ og la f være funksjonen gitt ved

$$f(z) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(z) & \operatorname{Im}(z) \\ -\operatorname{Im}(z) & \operatorname{Re}(z) \end{bmatrix},$$

dvs. hvis $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, så er $f(z)$ lik 2×2-matrisen

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

a) (8 poeng) Vis at $f(zw) = f(z)f(w)$ for alle $z, w \in \mathbb{C}$.

b) (8 poeng) Vis at $f(z^n) = (f(z))^n$ for alle $z \in \mathbb{C}, n = 1, 2, 3, \ldots$.

c) (4 poeng) Regn ut

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}^9$$

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 14. (10 poeng) La $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon der $0 < a < b$ og la

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Vis at det fins $c \in (a, b)$ slik at

$$\int_a^c f(x)\,dx = cf(c).$$

(Hint: Bruk middelverdisetningen på funksjonen $F(x) = \frac{1}{x}\int_a^x f(t)\,dt$.)

Oppgave 15. (10 poeng) La P være et polynom, $P \neq 0$ (dvs. P er ikke polynomet som er identisk lik 0). Vis at likningen

$$|P(x)| = e^x$$

har minst én reell løsning.

SLUTT