UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100U — Kalkulus
Eksamensdag:	Tirsdag 21. april 2015
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Svarark, formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen inneholder 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er kun ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen inneholder oppgaver der du må begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. I denne delen er poengsummen angitt for hvert delspørsmål. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktige!

DEL 1

SVARENE I DENNE DELEN SKAL FØRES INN PÅ DET VEDLAGTE SVARARKET SOM LEVERES SAMMEN MED RESTEN AV BESVARELSEN.

Oppgave 1. (3 poeng) La $f(x, y) = xy + \sin(xy)$. Da er $\frac{\partial f}{\partial x}$ lik

A) $xy(1 + \cos(xy))$
B) $y + \cos(xy)$
C) $y(1 + \cos(xy))$
D) $x(1 + \cos(xy))$
E) $x + y + \cos(xy)$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2. (3 poeng) La A være 2×2-matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. Da er $(AA)^T$ lik

A) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$
B) $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$
C) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$
E) $\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Oppgave 3. (3 poeng) La $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x, y, z) = \arctan(x^2 yz)$$

Den retningsderiverte til f i punktet $\mathbf{a} = (1, -1, 2)$ i retningen $\mathbf{r} = (1, 1, 1)$ er

A) $\frac{3}{5}$
B) $\frac{1}{5}$
C) 0
D) $-\frac{1}{5}$
E) $-\frac{3}{5}$

Oppgave 4. (3 poeng) Finn grenseverdien

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\, dx}{x^3}$$

A) $\frac{1}{6}$
B) $\frac{1}{3}$
C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{2}{3}$
E) 1

Oppgave 5. (3 poeng) La $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4$ være gitt ved $\mathbf{v} = (2, 3, 0, -6)$. Finn alle $k \in \mathbb{R}$ slik at $|k\mathbf{v}| = 5$.

A) $k = \pm\frac{\sqrt{5}}{7}$
B) $k = \pm\frac{1}{7}$
C) $k = \pm\frac{5}{7}$
D) $k = \pm\frac{\sqrt{35}}{7}$
E) $k = \pm\frac{25}{49}$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 6. (3 poeng) Finn alle a slik at $\det A = 0$, der

$$A = \begin{bmatrix} a-4 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 3 & a-1 \end{bmatrix}$$

A) $a = 0, a = 1$ og $a = 4$
B) $a = -1, a = 0$ og $a = 4$
C) $a = 2, a = 3$ og $a = 4$
D) $a = -3, a = 2$ og $a = 4$
E) $a = -2, a = 3$ og $a = 4$

Oppgave 7. (3 poeng) Jacobimatrisen til $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (yze^x, xe^{yz})$$

i punktet $(1, 0, 1)$ er

A) $\begin{bmatrix} 0 & e & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ e & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ e & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Oppgave 8. (3 poeng) Det uegentlige integralet

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cot x \, dx$$

A) konvergerer, og har verdi 1
B) konvergerer, og har verdi $\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$
C) konvergerer, og har verdi $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) konvergerer, og har verdi $\ln \frac{\sqrt{2}}{2}$
E) divergerer

Oppgave 9. (3 poeng) Finn alle løsningene til likningen $z^4 = -64$.

A) $\sqrt[3]{4} \pm \sqrt[3]{4}i$ og $-\sqrt[3]{4} \pm \sqrt[3]{4}i$
B) $\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$ og $-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$
C) $2\sqrt{2} \pm 2i$ og $-2\sqrt{2} \pm 2i$
D) $2 \pm 2i$ og $-2 \pm 2i$
E) $2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}i$ og $-2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}i$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 10. (3 poeng) Finn grenseverdien

$$\lim_{x\to\infty}\Big(\frac{1}{\ln x}\int_0^x \frac{1}{\sqrt[3]{1+t^3}}\,dt\Big).$$

A) 0
B) $\frac{1}{3}$
C) 1
D) 3
E) ∞

OPPGAVESETTET FORTSETTER MED DEL 2 PÅ NESTE SIDE

(Fortsettes på side 5.)

DEL 2

HUSK AT I DENNE DELEN MÅ DU BEGRUNNE ALLE SVARENE DINE!

Oppgave 11. (10 poeng) Finn volumet til omdreiningslegemet som fremkommer når vi dreier området under grafen til $y = \arcsin(x^2)$, $0 \leq x \leq 1$, om y-aksen.

Oppgave 12.

a) (5 poeng) Vis at $z = 1 + i\sqrt{2}$ er en rot i polynomet $P(z) = z^3 - z + 6$. Finn den komplekse og reelle faktoriseringen til $P(z)$.

b) (10 poeng) Finn delbrøkoppspaltingen til uttrykket

$$\frac{3x^2 + x + 1}{x^3 - x + 6}.$$

c) (10 poeng) Løs integralet

$$\int \frac{3x^2 + x + 1}{x^3 - x + 6}\, dx.$$

Oppgave 13. La

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

være en $n \times n$-matrise. Vi definerer *trasen* til A, $\operatorname{tr}(A)$, til å være summen av diagonalkomponentene til A, dvs.

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

La $k \in \mathbb{R}$ og la A og B være to $n \times n$-matriser.

a) (3 poeng) Vis at $\operatorname{tr}(kA) = k \operatorname{tr}(A)$.

b) (3 poeng) Vis at $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$.

c) (3 poeng) Følgende gjelder for $n \times n$-matriser: $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. Vis dette for $n = 2$.

d) (6 poeng) Vis at det ikke fins to $n \times n$-matriser A og B slik at $AB - BA = I$ der I er $n \times n$-identitetsmatrisen. (Du kan benytte punktene ovenfor selv om du ikke har vist disse.)

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 14. (10 poeng) Anta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ og f er kontinuerlig i 0. La $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være slik at $|g(x)| \leq |f(x)|$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Vis at g er kontinuerlig i 0 ved ϵ-δ-definisjonen.

Oppgave 15. (10 poeng) La $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ være kontinuerlig på $[0, 1]$ og deriverbar på $(0, 1)$. Anta at $f(0) = f(1) = 0$ og at det fins $x_0 \in (0, 1), x_0 \neq \frac{1}{2}$, slik at $f(x_0) = 1$. Vis at $|f'(c)| > 2$ for en $c \in (0, 1)$.

SLUTT