Løsningsforslag MAT1100U

eksamen 21/4-15, del 2:

Oppgave 11. Volumet V kan regnes ut ved følgende integral:

$$V = \int_0^1 2\pi x \arcsin(x^2)\,dx$$

$$\int 2x \arcsin(x^2)\,dx$$

$u = x^2$
$du = 2x\,dx$

$$= \int \arcsin u\,du$$

$s = \arcsin u \quad s' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$
$t' = 1 \quad t = u$

$$= u\arcsin u - \int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

$$= u\arcsin u + \sqrt{1-u^2} + C$$

$$= x^2 \arcsin x^2 + \sqrt{1-x^4} + C$$

(NB: this dot regnes ut som bestemt integral her (m/grenser), må dette behandles som et uegentlig integral)

$$V = \pi\left[x^2 \arcsin x^2 + \sqrt{1-x^4}\right]_0^1$$

$$= \pi\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Oppgave 12.

a) $P(z) = z^3 - z + 6$

$$P(1+i\sqrt{2}) = (1+i\sqrt{2})^3 - (1+i\sqrt{2}) + 6$$
$$= 1 + 3i\sqrt{2} - 3\cdot 2 - i2\sqrt{2} - 1 - i\sqrt{2} + 6$$
$$= 0,$$

dermed er $1+i\sqrt{2}$ en rot i polynomet.
Siden $P(z)$ er et reelt polynom, er $\overline{1+i\sqrt{2}}$ også en rot, dvs. en kompleks faktorisering av $P(z)$ inneholder faktorene $(z-(1+i\sqrt{2}))$ og $(z-(1-i\sqrt{2}))$.

Vi regner ut den tredje roten (som vi vet er reell, siden $P(z)$ er av oddegrad):

$$(z-(1+i\sqrt{2}))(z-(1-i\sqrt{2})) = z^2 - 2z + 3$$

$$\begin{array}{l} z^3 - z + 6 : z^2 - 2z + 3 = z + 2 \\ -(z^3 - 2z^2 + 3z) \\ \hline 2z^2 - 4z + 6 \\ -(2z^2 - 4z + 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

(kan evnt. gjette på reell rot og skippe poly.div.)

Dette gir

kompleks faktorisering: $P(z) = (z-(1+i\sqrt{2}))(z-(1-i\sqrt{2}))(z+2)$

reell faktorisering: $P(z) = (z^2 - 2z + 3)(z+2)$

b) $$\frac{3x^2+x+1}{x^3-x+6} = \frac{Ax+B}{x^2-2x+3} + \frac{C}{x+2}$$

↑ fakt. fra a)

$$3x^2+x+1 = (Ax+B)(x+2) + C(x^2-2x+3)$$

$$3x^2+x+1 = Ax^2+Bx+2Ax+2B+Cx^2-2Cx+3C$$

$$\begin{cases} A+C=3 \\ 2A+B-2C=1 \\ 2B+3C=1 \end{cases}$$

$$A=3-C$$

$$\begin{cases} 2(3-C)+B-2C=1 \\ 2B+3C=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B-4C=-5 \\ 2B+3C=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2B+8C=10 \\ 2B+3C=1 \end{cases}$$

$$11C=11$$

$$C=1$$

$$A=3-1=2$$

$$B=-1$$

Delbrøkoppspalting:

$$\frac{3x^2+x+1}{x^3-x+6} = \frac{2x-1}{x^2-2x+3} + \frac{1}{x+2}$$

c) $\int \frac{3x^2+x+1}{x^3-x+6}\,dx \overset{\text{fak b)}}{=} \int \frac{2x-1}{x^2-2x+3}\,dx + \int \frac{1}{x+2}\,dx$

$$\int \frac{2x-1}{x^2-2x+3}\,dx = \int \frac{2x-2}{x^2-2x+3}\,dx + \int \frac{1}{x^2-2x+3}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^2-2x+3}\,dx = \int \frac{1}{x^2-2x+1+2}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{2\left(\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)}\,dx$$

$$= \ln(x^2-2x+3) + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + \ln|x+2| + C$$

Oppgave 13.

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad \text{for } A \text{ nxn-matrise}$$

a) La $k \in \mathbb{R}$, A, B nxn-matriser.
La $A = [a_{ij}]$. Da er $kA = [ka_{ij}]$.

$$\mathrm{tr}(kA) = \sum_{i=1}^{n} k a_{ii} = k \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = k\,\mathrm{tr}(A)$$

b) La $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$. Da er $A+B = [a_{ij}+b_{ij}]$

$$\mathrm{tr}(A+B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii}+b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{tr}\,A + \mathrm{tr}\,B$$

c) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & * \\ * & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21} & * \\ * & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22} \end{bmatrix}$$

Vi ser at summen av diagonalkomponentene er like, dvs. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

d) Anta $AB - BA = I$ for to nxn-matriser A og B.
Da er $\mathrm{tr}(AB-BA) = \mathrm{tr}\,I$

$\mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = n$ (ved a) og b)

$\mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(AB) = n$ (ved c) og siden $\mathrm{tr}\,I = n$)

gir $0 = n$, som er motsigelse siden $n \geq 1$.

Dermed finns ikke to nxn-matriser A og B slik at $AB - BA = I$.

Oppgave 14.

Anta $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ og f er kont. i 0.

La $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være s.a. $|g(x)| \leq |f(x)|$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Da er g kont. i 0:

Først, siden $|g(0)| \leq |f(0)| = 0$, er $g(0) = 0$.

Gitt $\varepsilon > 0$.

Siden f er kont. i 0 fins $\delta > 0$ slik at

$|f(x) - f(0)| = |f(x)| < \varepsilon$ for $x \in \mathbb{R}$ og $|x - 0| < \delta$.

Dermed har vi også

$$|g(x) - g(0)| = |g(x)| \leq |f(x)| < \varepsilon$$

for $x \in \mathbb{R}$ og $|x - 0| < \delta$,

så g er kont. i 0 (ved ε-δ-def.)

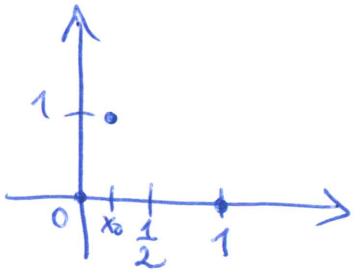
Oppgave 15.

La $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ være kont. på $[0,1]$ og deriverbar på $(0,1)$. Anta at $f(0) = f(1) = 0$ og at det finns $x_0 \in (0,1)$, $x_0 \neq \frac{1}{2}$, slik at $f(x_0) = 1$.

Da har vi at $|f'(c)| > 2$ for en $c \in (0,1)$:

x_0 ligger enten mellom 0 og $\frac{1}{2}$ eller mellom $\frac{1}{2}$ og 1, dvs. vi får to tilfeller – i begge tilfeller vil det finnes et punkt c slik at $|f'(c)| > 2$.

① Anta $0 < x_0 < \frac{1}{2}$:

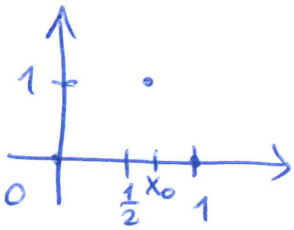


Vi ser nå på intervallet $[0, x_0]$ (se tegning): Middelverdisetn. (MVS) gir at det finns $c \in (0, x_0)$ slik at

$$\frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = f'(c), \text{ så } f'(c) = \frac{1-0}{x_0 - 0} = \frac{1}{x_0}$$

Siden $0 < x_0 < \frac{1}{2}$, er $f'(c) = \frac{1}{x_0} > 2$.

② Anta $\frac{1}{2} < x_0 < 1$:



Vi ser nå på intervallet $[x_0, 1]$ (se tegning): MVS gir at det finns $c \in (x_0, 1)$ slik at

$$\frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} = f'(c), \text{ dvs. } f'(c) = \frac{0-1}{1-x_0} = -\frac{1}{1-x_0}$$

Vi har $x_0 > \frac{1}{2}$

$1 - x_0 < \frac{1}{2}$

$\frac{1}{1-x_0} > 2$, så $|f'(c)| = \left|-\frac{1}{1-x_0}\right| > 2$.

∎