

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1105 — Lineær algebra og numeriske metoder

Eksamensdag: Prøveeksamen

Tid for eksamen: 15:00 – 19:00.

Oppgavesettet er på 5 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Settet består av 10 deloppgaver som alle teller 6 poeng. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Lykke til!

Oppgave 1 (6 poeng)

Bevis følgende utsagn ved hjelp av induksjon:

$$\text{Om } n \in \mathbb{N} \text{ er } 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Løsning:

Bevis. Når $n = 1$ er venstre side $2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3$, mens høyre side er $2^2 - 1 = 3$, så utsagnet stemmer. Anta nå at utsagnet stemmer for $n = m \in \mathbb{N}$. Da er

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1,$$

som var det vi ville vise. □

Oppgave 2 (6 poeng)

La $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$, der $n > m$. Bevis at $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ er lineært avhengige, altså at det finnes $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ som ikke alle er lik 0, og som er slik at $x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = 0$.

Løsning: La $A = (\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_n)$. Om vi radreduserer A til redusert trappeform, ser vi at A har minst én kolonne som ikke er en pivotkolonne, siden $n > m$. Dermed finnes det uendelig mange løsninger på ligningen

(Fortsettes på side 2.)

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, og om $\mathbf{x}$ er en ikke-null løsning på ligningen, er $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, slik at $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ er lineært avhengige.

Oppgave 3 (6 poeng)

La $n \in \mathbb{N}$, og la A og B være mengder med $\#A = \#B = n$ (altså at både A og B har n elementer). La $f: A \rightarrow B$ være en funksjon. Bevis følgende utsagn med et motsigelsesbevis:

Hvis f er surjektiv, så er f også injektiv.

Løsning:

Bevis. Anta motsatt at f ikke er injektiv, så det finnes $x, y \in A$ slik at $x \neq y$, men $f(x) = f(y)$. La $V_f = \{f(x) : x \in A\}$ være verdimengden til f . Siden f er surjektiv, er $V_f = B$, så $\#V_f = n$. På den annen side er $V_f = C \cup D$, der

$$C = \{f(x), f(y)\} \text{ og } D = \{f(z) : z \in A \setminus \{x, y\}\}.$$

Vi har $\#C = 1$ og $\#D \leq n - 2$, så

$$n = \#V_f \leq \#C + \#D \leq 1 + (n - 2) = n - 1,$$

en selvmotsigelse. □

Oppgave 4 (12 poeng)

I denne oppgaven setter vi $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

4a

Finn den inverse matrisen til A

Løsning: Vi radreduserer:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III \sim 2I} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 13 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{III \sim 3II} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \sim 4III} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 13 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{I + 6III} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 6 & -18 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 13 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{I + 2II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 13 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

(Fortsettes på side 3.)

Det følger at $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 5 \\ -4 & 13 & 8 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

4b

Skriv A som et produkt av elementære matriser. Hva blir determinanten til A ?

Løsning: Fra radoperasjonene over følger det at A kan skrives (Vi tar de inverse radoperasjonene i motsatt rekkefølge).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Fem av radoperasjonene legger et multiplum av en rad til en annen. Ingen av disse endrer determinanten. Det er bare radbyttet som endrer determinanten med et fortegnsskift. Determinanten blir derfor -1 . Dette kan man også lett se ved å utvikle determinanten, for eksempel langs første søyle:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 2(-6 + 8) - 0 + (-4 - 1) = 4 - 5 = -1.$$

Oppgave 5 (12 poeng)

La A være matrisen $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$.

5a

Finn egenverdiene og egenvektorene til A .

Løsning: Vi har at

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 0.2)^2 - 0.64,$$

og dette er 0 kun $\lambda - 0.2 = \pm 0.8$. Derfor blir egenverdiene $\lambda_1 = -0.6$ og $\lambda_2 = 1$.

Egenvektor for $\lambda_1 = -0.6$:

$$-0.6I - A = \begin{pmatrix} -0.8 & -0.8 \\ -0.8 & -0.8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En spesiell egenvektor blir $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Egenvektor for $\lambda_2 = 1$:

$$I - A = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.8 \\ -0.8 & 0.8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En spesiell egenvektor blir $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5b

Hva er kondisjonstallet $K(A)$?

Løsning: Matrisen er symmetrisk. Den er også inverterbar, siden begge egenverdiene er $\neq 0$. Kondisjonstallet er derfor forholdet mellom største og minste egenverdi i absoluttverdi, som gir $K(A) = 1/0.6 = 5/3$.

Oppgave 6 (6 poeng)

Vi ser på funksjonen $f(x) = x^4 - x^3$. Finn newtonformen til det unike kubiske polynomet som interpolerer f i punktene $-1, 0, 1$, og 2 .

Løsning: Det interpolerende polynomet har formen

$$p_3(x) = c_0 + c_1(x+1) + c_2(x+1)x + c_3(x+1)x(x-1)$$

Vi har at $f(-1) = 2$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, og $f(2) = 8$. Vi får derfor likningene

$$2 = c_0$$

$$0 = c_0 + c_1$$

$$0 = c_0 + 2c_1 + 2c_2$$

$$8 = c_0 + 3c_1 + 6c_2 + 6c_3.$$

Dette gir først at $c_0 = 2$, $c_1 = -2$. Deretter får vi at $c_2 = (-2+4)/2 = 1$, og $c_3 = (8 - 2 + 6 - 6)/6 = 1$. Det følger at

$$p_3(x) = 2 - 2(x+1) + (x+1)x + (x+1)x(x-1).$$

Oppgave 7 (6 poeng)

Vi ser på tilnærmingen til $f''(a)$ gitt ved

$$\frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}.$$

Hva er feilen i denne tilnærmingen for $f(x) = x^4$?

Løsning: Vi regner ut

$$\begin{aligned} & \frac{(a-h)^4 - 2a^4 + (a+h)^4}{h^2} \\ &= \frac{a^4 - 4a^3h + 6a^2h^2 - 4ah^3 + h^4 - 2a^4 + a^4 + 4a^3h + 6a^2h^2 + 4ah^3 + h^4}{h^2} \\ &= \frac{12a^2h^2 + 2h^4}{h^2} = 12a^2 + 2h^2. \end{aligned}$$

Siden $f''(a) = 12a^2$ så blir feilen $|(12a^2 + 2h^2) - 12a^2| = 2h^2$.

Oppgave 8 (6 poeng)

Finn en tilnærming til $\int_1^9 \cos(\pi x/12) dx$ ved hjelp av midtpunktsmetoden med 4 delintervaller.

Løsning: Vi har $h = (9-1)/4 = 2$. De fire intervallene blir $[1, 3]$, $[3, 5]$, $[5, 7]$, $[7, 9]$ og midtpunktene på disse er 2, 4, 6, 8. Midtpunktsmetoden gir dermed

$$\begin{aligned} & 2(\cos(\pi 2/12) + \cos(\pi 4/12) + \cos(\pi 6/12) + \cos(\pi 8/12)) \\ &= 2(\cos(\pi/6) + \cos(\pi/3) + \cos(\pi/2) + \cos(2\pi/3)) \\ &= 2(\sqrt{3}/2 + 1/2 + 0 - 1/2) = \sqrt{3}. \end{aligned}$$