

Forelesning 16. Oktober

Seksjon 4.6 : FVLA: Lineær uavhengighet og basiser.

Vi sier at $\vec{b}$ er en lineær kombinasjon av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ hvis det finnes skalarer $x_1, \dots, x_n$ s.a. $\vec{b} = x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n$
koeffisienter

Merk: $A\vec{x} = \vec{b}$ er det samme som at $\vec{b}$ er en lineær kombinasjon av søylene til A (koeffisientene er $x_1, \dots, x_n$).

Eksempel 1 Skriv $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ som en lineær kombinasjon av $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 8 \\ 3 & -8 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Derfor er $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
lin. komb. av søylene i A .

Spennet $Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ til $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ består av alle vektorer som kan skrives som lineære kombinasjoner av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$.

Merk 1: Hvis $Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \mathbb{R}^m$, så må $n \geq m$:

Da har nemlig $A\vec{x} = \vec{b}$ en løsning for alle $\vec{b}$,
og da må alle rader i A være pivotrader, og

$$m = \text{antall rader} = \text{antall pivotrader} = \text{antall pivot søyler} \leq \text{antall søyler} = n$$

Definisjon 4.6.5: $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ kalles lineært uavhengige
hvis enhver $\vec{b} \in Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ kan skrives som en
lineær kombinasjon av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ på en entydig måte.
Ellers sier vi at $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært avhengige

Setning 4.6.6 / 4.6.7: Følgende er ekvivalent:

- (i) $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige.
- (ii) $x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{0} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$
- (iii) $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ har bare pivot søyler.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii)

$$\Leftarrow: \text{Hvis } x_1 = \dots = x_n = 0 \Rightarrow x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

$$\Rightarrow: \text{Hvis } x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{0} \text{ så er } A\vec{x} = \vec{0}$$

Siden $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige, så har

$A\vec{x} = \vec{0}$ en entydig løsning. Siden $A\vec{0} = \vec{0}$

så er $\vec{x} = \vec{0}$ denne entydige løsningen,

og da er $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

$$(ii) \Rightarrow (iii): (ii) \text{ sier at } A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

Det er da ingen frie variable i systemet

$\Rightarrow$ alle søyler er pivot søyler

(iii) $\Rightarrow$ (i): Når alle søyler er pivotsøyler
så har $A\vec{x} = \vec{b}$ alltid entydig løsning

$\Rightarrow \vec{b}$ kan skrives som lin. komb. av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ på
en entydig måte $\Rightarrow \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige

Merk 2: Hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige, så er $n \leq m$.

Siden alle søyler i A er pivotsøyler så er

$n = \text{antall søyler} = \text{antall pivotsøyler} = \text{antall pivotrader}$
 $\quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad \text{antall rader} = m$

$$\Downarrow$$
$$n \leq m.$$

Kombinerer vi merk 1 og merk 2 får vi

Hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lin. uavh., og utspenner $\mathbb{R}^m$, så er $n = m$.

Definisjon 4.6.12 En basis for $\mathbb{R}^m$ er en samling
vektorer $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ som er lin. uavh.,
og utspenner $\mathbb{R}^m$

Merk a) Hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er en basis for $\mathbb{R}^n$, så er $A \sim I_n$

b) Hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lin. uavh. i $\mathbb{R}^n$ eller
utspenner $\mathbb{R}^n$, så utgjør de en basis

Spørsmål 1: Hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige, hvordan
kan vi finne en delmengde som er lineært uavhengig,
og med samme spenn?

Svar: Radreduser $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, og plukk ut de $\vec{a}_i$ som svarer til pivotsøyler.

Eksempel $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Søyle 1 og 2 er pivotsøyler

Derfor er $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lineær uavhengige, og med samme spenn.

Spørsmål 2: Hvordan utvide $\underbrace{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n}_{\text{lin. uavh.}} \in \mathbb{R}^m$ til en basis for $\mathbb{R}^m$?

Svar: 1) Radreduser $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ til trappeform

2) "sette inn" pivotsøyler slik at alle rader blir pivotrader.

3) "Radredusere baklengs" for å finne $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \underbrace{\vec{a}_{n+1}, \dots, \vec{a}_m}_{\text{innsette pivot-søyler}}$

Eksempel: Sett $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\vec{a}_1$ $\vec{a}_2$

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} \leftarrow \text{I}]{\text{II} \leftarrow \text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} \leftrightarrow \text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I} \leftarrow \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) setter inn pivotsøyle: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (mangler pivotelement i rad 3)

3) radreduser baklengs

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I} \leftarrow \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} \leftrightarrow \text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow[\text{III} \leftarrow \text{I}]{\text{II} \leftarrow \text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} \leftarrow \text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\vec{a}_3$

fikk tilbake

Vi fikk nå at $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, og $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.

Seksjon 4.8

Elementære matriser er matriser som fremkommer ved å gjøre en radoperasjon på I_n .

Eksempel $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ er den elementære matrisen som svarer til $I + 3II$

Fakta om disse:

1. Alle radoperasjoner kan reverseeres:

operasjon	inverse operasjon
$I + II$	$I - II$
$2 \cdot I$	$\frac{1}{2} \cdot I$
$I \leftrightarrow II$	$I \leftrightarrow II$

2. En radoperasjon på en matrise svarer til å gange med den tilsvarende matrisen fra venstre.

3. Elementære matriser er inverterbare, og inversen er igjen elementær (svarer til invers radoperasjon).

Eksempel: Siden $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{I - 3II} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, så er

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & -8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{elementær matr.}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Setning 4.8.4 Enhver $m \times n$ matrise A kan skrives

$$A = E_1 E_2 \dots E_k B$$

der B er den reduserte trappeformen til A , og

Elementære matriser ($m \times m$).

Beweis: $B = \text{ref}(A) = F_k \cdots F_2 F_1 A$

elementære matriser, svarer ti udops.
som bringer A til red. trapeform.

Siden $F_1, \dots, F_n$ er inverterbare, og $F_i^{-1} = E_i$
også elementær.

Så er:

$$B = F_k \cdots F_1 A$$

$$F_1^{-1} F_2^{-1} \cdots F_k^{-1} B = A$$

$$E_1 E_2 \cdots E_n B = A \quad \blacksquare$$

Merk: Hvis A er inverterbar så er $B = I_n$, slik at

$A = E_1 \cdots E_n$. Enhver inverterbar matrise kan
skrives som et produkt av elementære matriser.