

Seksjon 4.8 om elementære matriser, avslutningsvis

Eksempel: Skriv $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ som et produkt av elementære matriser.

Løsning: $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - 6I} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \cdot (-\frac{1}{12})} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \quad F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$F_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = E_1 E_2 E_3 E_4 = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Seksjon 4.9 : Determinanter

Defineres induktivt ved å "utvikle" langs første rad.

Eksempel: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

minorer, underdeterminanter

$$\left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c \right) = 3(0 \cdot 4 - 3 \cdot 0) - 1(2 \cdot 4 - 3 \cdot 1) + 4(0 \cdot 0 - 2 \cdot 1)$$
$$= 3 \cdot 0 - 1(8 - 3) + 4 \cdot 0 = \underline{\underline{-5}}$$

Teorem 4.9.10 La A være en kvadratisk matrise

- (i) Hvis A er øvre/nedre triangulær, så er determinanten lik produktet av diagonalelementene.
- (ii) Bytter vi om to rader i A , så ganges determinanten med (-1)
- (iii) Ganger vi en rad med et tall s , så ganges også determinanten med s .
- (iv) Hvis en rad ganget med et tall legges til en annen rad, så endres ikke determinanten

Beris for (i): Ser på øretriangulære matriser:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$$

også øretriangulær

har nullspøyle,
da er determinanten 0,
se i boka.

antar ved induksjon

$$= a_{11} (a_{22} \dots a_{nn})$$
$$= a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

Spesielt, hvis E er en elementar matrise: ($\det I_n = 1$).

E : rad ganges med $s \Rightarrow \det E = s$

$$E : \text{radbytte} \Rightarrow \det E = -1$$

$$E : \text{en rad legges til en annen} \Rightarrow \det E = 1$$

Det følger at $\det(E_1 \cdots E_k A) = \det(E_1) \cdots \det(E_k) \det(A)$.

Spesielt $\det(E_1 \cdots E_n) = \det(E_1) \cdots \det(E_n)$.

Eksempel: Vi fant tidligere:

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{elementare}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{elementare}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}}_{\text{elementare}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{elementare}}$$

$$\det = -1 \quad \det = 1 \quad \det = -12 \quad \det = 1$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \det(E_1) \det(E_2) \det(E_3) \det(E_4)$$

$$= (-1) \cdot 1 \cdot (-12) \cdot 1 = \underline{12}.$$

Kontroll: $\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 18 - 6 = \underline{12}$

Teorem 4.9.12: Anta A er $n \times n$. Følgende er ekvivalent:

- (i) $\det(A) \neq 0$
- (ii) A er inverterbar
- (iii) $A\vec{x} = \vec{b}$ har entydig løsning for alle $\vec{b}$
- (iv) $A\vec{x} = \vec{0}$ har kun løsningen $\vec{x} = \vec{0}$
- (v) Spålene i A er en basis for $\mathbb{R}^n$
- (vi) A er radekvivalent med I_n

Vi viser (i) $\Leftrightarrow$ (vi):

$$(vi) \Leftrightarrow \text{rref}(A) = I_n \Leftrightarrow A \text{ er et produkt av elementare matriser}$$

$$A = E_1 \cdots E_k$$

$$\det(A) \neq 0, \text{ siden } \det(E_1 \cdots E_k) = \det(E_1) \cdots \det(E_k)$$

(husk at $\det(E_i) \neq 0$) ■

Setning 4.9.16 : Hvis A og B er $n \times n$, så er $\det(AB) = \det A \det B$.

Beris : Anta A ikke inverterbar. Lemma 4.9.15 : AB er heller ikke inverterbar

$$\left. \begin{array}{l} \text{Da er} \quad \det(A)\det(B) = 0 \cdot \det B = 0 \\ \det(AB) = 0 \end{array} \right\} \det(AB) = \det(A)\det(B) = 0$$

Anta A er inverterbar : Skriv $A = E_1 \cdots E_k$ (elementære).

$$\det(A)\det(B) = \det(E_1 \cdots E_k)\det(B) = \det(E_1) \cdots \det(E_k) \det(B)$$

$$\det(AB) = \det(E_1 \cdots E_k B) = \det(E_1) \cdots \det(E_k) \det(B)$$

Merk : Sidon $A^{-1}A = I_n$ så er

$$\det(A^{-1}A) = \det(I_n)$$

$$\det(A^{-1})\det(A) = 1$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

Merk : Man kan også utvikle langs andre rader/søyer.

(velg rad/søyle med mange nuller.

Eksempel : Vi fant $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -5$ (utviklet langs første rad)

Vi utvikler i stedet langs andre søyle :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} &= -1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0 - 0 = (-1) \cdot (2 \cdot 4 - 3 \cdot 1) \\ &= -(8 - 3) = \underline{\underline{-5}} \end{aligned}$$

Fortegnsskjema:
$$\begin{pmatrix} + & - & + & & \\ - & + & - & \dots & \\ + & - & + & & \\ & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

Seksjon 4.7

En mengde $H \neq \emptyset$ i $\mathbb{R}^n$ kalles et underrom av $\mathbb{R}^n$ hvis:

a) $\vec{u} \in H \Rightarrow c\vec{u} \in H$ for alle $c \in \mathbb{R}$

b) $\vec{u}, \vec{v} \in H \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in H$

$Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ er et underrom av $\mathbb{R}^m$:

a) Anta $\vec{u} = x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n$

Da er $c\vec{u} = cx_1 \vec{a}_1 + \dots + cx_n \vec{a}_n$, som også er en lin. komb. av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, s.a. $c\vec{u} \in Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$.

b) Anta og at $\vec{v} = y_1 \vec{a}_1 + \dots + y_n \vec{a}_n$. Da er

$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + y_1) \vec{a}_1 + \dots + (x_n + y_n) \vec{a}_n$, som også er en lin. komb. av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, s.a. $\vec{u} + \vec{v} \in Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$.

La $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$, definer $H = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^m \mid \vec{x} \cdot \vec{a} = 0 \}$

H kalles for det ortogonale komplementet til $\vec{a}$.

H er også et underrom:

a) Hvis $\vec{u} \in H$ så er $\vec{u} \cdot \vec{a} = 0$

Vi har $(c\vec{u}) \cdot \vec{a} = c(\vec{u} \cdot \vec{a}) = c \cdot 0 = 0 \Rightarrow c\vec{u} \in H$

b) Anta og $\vec{v} \in H$ ($\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{a} = 0$)

Vi har $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{a} = \vec{u} \cdot \vec{a} + \vec{v} \cdot \vec{a} = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in H$.

Merk: Hvis H er et underrom, og $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in H$, så er også
$$c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_n \vec{a}_n \in H$$

Sætning 4.7.5 Hvis H er et underrom, så findes
 $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ som er lin. uafh., og med $H = \text{Sp}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$.

Ide: La n være det største antal lineært uafhængige
vektorer i H som du kan finde.

Hvis $H = \text{Sp}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ der $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lin. uafh.,
så sier vi at $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er en basis for H .