

Fra sist: Hvis $H = \text{Sp} \{ \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \}$, der $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige, så sier vi at $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er en basis for H

Setning 4.7.7: Alle basiser for H har like mange elementer

Beviskisse: Anta $\text{Sp}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \text{Sp}(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k)$, der $n > k$

Definer: $\vec{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ ved at

$$\vec{F}(c_1, \dots, c_n) \rightarrow (d_1, \dots, d_k)$$

$$\text{når } c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_n \vec{v}_n = d_1 \vec{w}_1 + \dots + d_k \vec{w}_k$$

$\vec{F}$ er definert på hele $\mathbb{R}^n$, veldefinert, $1 \rightarrow 1$, linear, og dermed gitt ved en matrise.

Siden $n > k$ finnes en søyle uten pivotelement.

Men da har vi en lineær avhengighetsrelasjon mellom søylene i A , $x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{0}$, men da er $A\vec{x} = \vec{0}$, som strider mot at A er $1 \rightarrow 1$ ($A\vec{0} = \vec{0}$)

Med dimensjonen til H , $\dim(H)$, mener vi antall elementer i en basis for H .

Noen andre underrom:

- 1) Spylrommet til en matrise, $\text{col}(A)$, = Spennet av søylene til A .
- 2) Radrommet til en matrise, $\text{row}(A)$, = Spennet av radene i A .
- 3) Nullrommet til A , $\text{Nul}(A) = \{ \vec{x} : A\vec{x} = \vec{0} \}$

(anta $\vec{x}, \vec{y} \in \text{Nul}(A)$. Da er $A\vec{x} = A\vec{y} = \vec{0}$, og da er $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, s.a. $\vec{x} + \vec{y} \in \text{Nul}(A)$ også).
 $A(c\vec{x}) = cA\vec{x} = c\vec{0} = \vec{0}$, s.a. $c\vec{x} \in \text{Nul}(A)$ også.

I boka : Dimensjonen til $\text{Col}(A)$ = antall pivotsøyler.

Boka viser at $\text{col}(A)$ og $\text{row}(A)$ har samme dimensjon, ved å vise at $\text{row}(A)$ ikke endres ved elementære radoperasjoner, og at pivotradene er lineært uavhengige, og er en basis for radrommet.

Pøeng : antall pivotrader = antall pivotsøyler.

Vi sier at $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ er ortonormale hvis $\begin{cases} \vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \vec{0}, i \neq j \\ \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = 1 \end{cases}$

Setning 4.7.12 Ethvert underrom har en ortonormal basis

Beris : La $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ være en basis for H

Definer $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$, og deretter

$$\vec{w}_k = \vec{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{\frac{\vec{v}_k \cdot \vec{w}_i}{\vec{w}_i \cdot \vec{w}_i}}_{\in \mathbb{R}} \vec{w}_i$$

Anta vi har vist at $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{k-1}\}$ er ortogonale.

Da er, for $r < k$

bare bidrag fra $i=r$

$$\begin{aligned} \vec{w}_k \cdot \vec{w}_r &= \left(\vec{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\vec{v}_k \cdot \vec{w}_i}{\vec{w}_i \cdot \vec{w}_i} \vec{w}_i \right) \cdot \vec{w}_r \\ &= \vec{v}_k \cdot \vec{w}_r - \frac{\vec{v}_k \cdot \vec{w}_r}{\vec{w}_r \cdot \vec{w}_r} \vec{w}_r \cdot \vec{w}_r \\ &= \vec{v}_k \cdot \vec{w}_r - \vec{v}_k \cdot \vec{w}_r = 0 \end{aligned}$$

Det følger at $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k\}$ også er ortogonal.

Men da er $\{\frac{\vec{w}_1}{|\vec{w}_1|}, \dots, \frac{\vec{w}_k}{|\vec{w}_k|}\}$ en ortonormal basis.

Merk: Hvis $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ er ortonormal basis for H ,
og $\vec{v} = c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_n \vec{v}_n$, så er

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{v}_i &= (c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_n \vec{v}_n) \cdot \vec{v}_i \\ &= c_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_i + \dots + c_n \vec{v}_n \cdot \vec{v}_i \\ &= c_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = c_i\end{aligned}$$

poenget er at det er lett å regne ut c_i
når vi har en ortonormal basis.