

Forelesning 23. Oktober

Seksjon 4.10 Egenvektorer og egenverdier

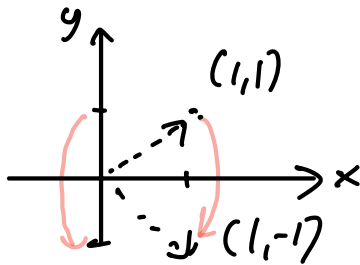
En vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ kalles en eigenvektor for A ($n \times n$) hvis det finnes $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

λ kalles egenverdien tilhørende $\vec{x}$

Eksempel 1: Se på den lineære avbildningen som speiler om linjen $y=0$.

Hva er matrisen til denne, samt egenvektorer/verdier?

Løsning:



$$\text{Vi har } T(\vec{e}_1) = (1, 0) = \vec{e}_1$$

$$T(\vec{e}_2) = (0, -1) = -\vec{e}_2$$

$$\text{Matrisen for } T \text{ blir dermed } \begin{pmatrix} T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ser at $\vec{e}_1$ er egenvektor med 1 som egenverdi

$\vec{e}_2$ er egenvektor med -1 som egenverdi.

Finne egenvektorer/verdier generelt

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow (\lambda I_n - A)\vec{x} = \vec{0}$$

Denne har en løsning $\vec{x} \neq \vec{0}$ hvis og bare hvis

$\lambda I_n - A$ ikke er invertierbar.



$$\det(\lambda I_n - A) = 0$$

$\det(\lambda I_n - A)$ er et polynom i λ , som kalles for det karakteristiske polynomiet til A , $(P_n(\lambda))$

Metode: 1. Løs $P_n(\lambda) = 0$ for λ

2. Finn $\vec{x}$ ved å radreducere $\lambda I_n - A$, alle λ .
 $\vec{x}$ blir da egenvektor for A , med egenverdi λ .

Eksempel igjen: Vi hadde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$P_n(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1),$$

som er 0 for $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$

Egenvektor for $\lambda_1 = -1$: $-I_2 - A = \begin{pmatrix} -1-1 & 0 \\ 0 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 \text{ fri}$$

Derfor er $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ generell egenvektor, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ spesiell egenvektor

Egenvektor for $\lambda_2 = 1$: $I_2 - A = \begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 0$$

$$x_1 \text{ fri}$$

Derfor er $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ generell egenvektor, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ spesiell egenvektor

Eksempel 2: Hva blir egenvektorer/egenverdier for $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Løsning: $\det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ -4 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0 - 0 + (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -4 & \lambda-3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)((\lambda-3)^2 - 4)$$

$$= 0 \text{ når}$$

$$(\lambda-3)^2 = 4$$

$$\lambda-3 = \pm 2$$

Derfor er $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$.

$$\lambda = 3 \pm 2i$$

$$\lambda = 1, \lambda = 5$$

Egenvektor for $\lambda_1 = 1$: $I_3 - A = \begin{pmatrix} 1-3 & -1 & 0 \\ -4 & 1-3 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$x_2 \text{ fri.}$$

generell egenvektor: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

spesiell egenvektor: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x_2 = 2)$

Egenvektor for $\lambda_2 = 2$: $2I_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 \text{ fri.}$$

Generell egenvektor: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Spesiell egenvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Egenvektor for $\lambda_3 = 5$: $5I_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$x_2 \text{ fri.}$$

Generell egenvektor: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Spesiell egenvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x_2 = 2)$

Sjekk at $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$:

$\lambda_1 = 1$:

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2 \\ -4+6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \vec{x}$$

$$\lambda_2 = 2 : A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \vec{x}$$

$$\lambda_3 = 5 : A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 4+6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_3 \vec{x}$$

Seksjon 4.11: Praktiske anvendelser

Eksempel: Vi studerer utviklingen av en sykdom, der x_n er antall syke etter n dager
 y_n er antall friske etter n dager.

Vi antar at det er 1000 mennesker til sammen:

$$x_n + y_n = 1000 \text{ for alle } n.$$

Vi antar også:

a) Hvis en er syk i dag, så er det 40% sjanse for at han er syk også imorgen.

b) Hvis en er frisk i dag, så er det 20% sjanse for at han er syk i morgen.

a) Finn en "overgangsmatrise" A s.a. $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

Løsning: Vi har

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= 0.4x_n + 0.2y_n \\ y_{n+1} &= 0.6x_n + 0.8y_n \end{aligned} \right\} \begin{matrix} \text{syke dagen før} & \text{friske dagen før} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

b) Hva er egenvektorene/verdiene til A?

Løsning: $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 0.4 & -0.2 \\ -0.6 & \lambda - 0.8 \end{vmatrix} = (\lambda - 0.4)(\lambda - 0.8) - 0.12$
 $= \lambda^2 - 1.2\lambda + 0.2$

Dette er 0 når $\lambda = \frac{1.2 \pm \sqrt{1.44 - 0.8}}{2} = \frac{1.2 \pm 0.8}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 0.2, \lambda_2 = 1$

Egenvektor for $\lambda_1 = 0.2$: $0.2 I_2 - A = \begin{pmatrix} -0.2 & -0.2 \\ -0.6 & -0.6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $x_1 + x_2 = 0$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ spesiell egenvektor $x_2 = 1$

Egenvektor for $\lambda_2 = 1$: $I_2 - A = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.6 & 0.2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ spesiell egenvektor $x_2 = 3$
 $x_1 - \frac{1}{3}x_2 = 0$

c) Finn et uttrykk for x_n, y_n , gitt at $x_0 = 0, y_0 = 1000$
alle friske ved $n=0$.

Løsning: Skriv $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix}$ som en linear kombinasjon av egenvektorer:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1000 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1000 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1000 \\ 0 & 4 & 1000 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1000 \\ 0 & 1 & 250 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 250 \\ 0 & 1 & 250 \end{pmatrix}$$

Derfor er $\begin{pmatrix} 0 \\ 1000 \end{pmatrix} = 250 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 250 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{pmatrix} = \dots = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$= A^n \left(250 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 250 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= 250 \left(A^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= 250 \left(0.2^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= 250 \begin{pmatrix} 1 - 0.2^n \\ 3 + 0.2^n \end{pmatrix}$$

når $n \rightarrow \infty$ så går dette mot $250 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 750 \end{pmatrix}$.

I det lange løp er altså 25% syke ■