

Fra forelesningen i går: Eigenverdiene / vektorene til A gjør det lettere å regne med A , og å forstå hva A gjør.

Setning 4.10.4: Vi kan uttrykke enhver vektor ved hjelp av egenvektorene til A hvis alle (n) egenverdiene er forskjellige.

Beris: Nok å vise at, hvis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ er egenvektorer for forskjellige egenverdier, så er disse lineært uavhengige. Hvis de er lin. avh., så har vi en lin. avh. relasjon:

$$c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

Da har vi en slik relasjon med færrest mulige vektorer der $c_i \neq 0$. Vi bruker denne ideniteten; og ganger med A :

$$A(c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_k \vec{v}_k) = c_1 A\vec{v}_1 + \dots + c_k A\vec{v}_k = \vec{0}$$

ganger med λ_1

$$= c_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + c_k \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

$$c_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + c_2 \lambda_1 \vec{v}_2 + \dots + c_k \lambda_1 \vec{v}_k = \vec{0}$$

trekk fra hverandre

$$= c_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \vec{v}_2 + \dots + c_k (\lambda_k - \lambda_1) \vec{v}_k = \vec{0}$$

Har nå laget en ny lin. avh. relasjon, som er enda kortere, som er en selvmotsigelse (antok at den vi startet med var den kortest mulige slike).

Hvis noen av egenverdiene er like:

Eksempel: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -2 & \lambda + 3 \end{vmatrix}$
 $= (\lambda - 1)(\lambda + 3) + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$
 $= (\lambda + 1)^2$

$\lambda = -1$ er eneste egenverdi.

Egenvektor(er): $-I - A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (x_1 - x_2 = 0)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (\text{spesiell egenvektor: } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

Vi kan ikke uttrykke alle vektorer v.h.a. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$!

Eksempel Anta $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2$
 $\lambda = 1$ er eneste egenverdi.

Egenvektorer: $I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1, x_2$ er frie variabler.

$$\text{Generell egenvektor } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ er spesielle egenvektorer, utspenner $\mathbb{R}^2$

komplekse egenverdier:

Eksempel: $A = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 8 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$

$$= (\lambda - 2)^2 + 16 = 0$$

$$\text{når } (\lambda - 2)^2 = -16$$

$$\lambda - 2 = \pm 4i$$

$$\lambda = 2 \pm 4i$$

$$\lambda_1 = 2 + 4i, \lambda_2 = 2 - 4i$$

Egenvektor for $\lambda_1 = 2 + 4i$:

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} 4i & 8 \\ -2 & 4i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 - 2ix_2 &= 0 \\ x_1 &= 2ix_2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ix_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

spesiell egenvektor.

Egenvektor for $\lambda_2 = 2 - 4i$:

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} -4i & 8 \\ -2 & -4i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 + 2ix_2 &= 0 \\ x_1 &= -2ix_2. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2ix_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

spesiell egenvektor.

Egenvektorene er her konjugerte av hverandre (også egenverdiene)

Setning 4.10.8: Dette gjelder mer generelt:

Hvis A er reell, og $\lambda, \vec{x}$ er komplekse egenverdi/vektor,

Da er også $\bar{\lambda}$ en egenverdi, med $\bar{\vec{x}}$ som egenvektor

Bevis: Hvis $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ så er

$$\overline{A\vec{x}} = \overline{\lambda\vec{x}}$$

$$\bar{A}\bar{\vec{x}} = \bar{\lambda}\bar{\vec{x}}$$

$$A\bar{\vec{x}} = \bar{\lambda}\bar{\vec{x}}, \text{ slik at } \bar{\lambda} \text{ er egenverdi for } \bar{\vec{x}}.$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \lambda - \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = 0$$

$$\lambda - \cos \theta = \pm i \sin \theta$$

$$\lambda = \cos \theta \pm i \sin \theta.$$

egenvektor for $\lambda = \cos \theta + i \sin \theta$:

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} i \sin \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & i \sin \theta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x_1 - ix_2 = 0)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

↑ spesiell egenvektor.

4.12 Spektralteoremet

Teorem 4.12.1 Hvis A er symmetrisk ($A = A^T$), så har A en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer for A

Hopper over beviset (bruker 4.7 i boka)

Setning 4.10.12

Matriser der egenvektorene danner en basis for $\mathbb{R}^n$ lar seg diagonalisere, d.v.s. det finnes en

inverterbar matrise M slik at $A = M D M^{-1}$,

$$\text{der } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

↖ egenverdier til A .

Bevis: Sett $M = (\underbrace{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n}_{\text{egenvektorer } A})$

Da er $M \vec{e}_i = \vec{v}_i$, og $M^{-1} \vec{v}_i = \vec{e}_i$, og vi får

$$\underline{M D M^{-1} \vec{v}_i = M D \vec{e}_i = M(\lambda_i \vec{e}_i) = \lambda_i M \vec{e}_i = \lambda_i \vec{v}_i = A \vec{v}_i}$$

Siden dette holder for alle $\vec{v}_i$, så må $M D M^{-1} = A$ ■

Hvorfor er diagonalisering nyttig?

$$1) A^m = (M D M^{-1})^m = \cancel{M D M^{-1}} \cancel{M D M^{-1}} \dots \cancel{M D M^{-1}} \cancel{M D M^{-1}}$$

$= MD^m M^{-1}$
som er enklere å regne ut.

$$\begin{aligned} 2) \det(A) &= \det(MDM^{-1}) = \det(M) \det(D) \det(M^{-1}) \\ &= \det(D) = \lambda_1 \cdots \lambda_n. \end{aligned}$$

Setning 4.10.13

Matriser der egenvektorene danner en ortogonal basis

kan seg ortogonal diagonalisere, dvs. det finnes en ortogonal matrise M (dvs. $M^{-1} = M^T$) slik at $A = MDM^T$

Beris: Vi må vise at $M^T = M^{-1}$:

$$\begin{aligned} M^T M &= \begin{bmatrix} \vec{v}_1^T \\ \vdots \\ \vec{v}_n^T \end{bmatrix} [\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_n] = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^T \vec{v}_1 & \vec{v}_1^T \vec{v}_2 & \cdots \\ \vec{v}_2^T \vec{v}_1 & \vec{v}_2^T \vec{v}_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$