

Kap. 2, Numerisk analyse

Interpolasjon

I MAT1100 dekke uka:

Taylorpolynom: Tilnærming til en funksjon med et polynom som har samme verd i et punkt a , og deriverte i a .

Vi antar f n ganger deriverbar.

* Taylorrekke til f av orden n om a

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ser at $p_n(a) = f(a)$

deriver k ganger:

$$\frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$

$$0 \qquad \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cancel{k!} \qquad \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!} (k+1)! (x-a)$$

$\parallel \qquad \qquad \parallel$

$$f^{(k)}(a) \qquad \qquad 0 \text{ i } x=a$$

Derfor er $p_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, slik at

$$f(a) = p_n(a)$$

$$f'(a) = p_n'(a)$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(a) = p_n^{(n)}(a)$$

Taylor's formel med restledd sier at, hvis f er $(n+1)$ ganger kontinuerlig deriverbar, så er

$$f(x) = p_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}}_{\text{restledd, feilen mellom } f \text{ og } p_n}, \text{ der } c \in [a, x]$$

I interpolasjon finner vi i stedet en tilnærming til f med et polynom p_n som har samme verdier som f i et sett med punkter $x_0, x_1, \dots, x_n$:
interpolasjonspunkter

$$f(x_k) = p_n(x_k)$$

interpolasjonsbetingelsene.

p_n kalles det interpolerende polynomiet.

Seksjon 2.1 Kanonisk form for det interpolerende polynomiet:

$$p_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n.$$

Interpolasjonsbetingelser på kanonisk form:

$$\begin{array}{l} n+1 \text{ likninger} \\ n+1 \text{ ukjente } c_0, \dots, c_n \end{array} \left\{ \begin{array}{l} f(x_0) = c_0 + c_1 x_0 + \dots + c_n x_0^n \\ f(x_1) = c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_n x_1^n \\ \vdots \\ f(x_n) = c_0 + c_1 x_n + \dots + c_n x_n^n \end{array} \right. \quad (f(x_k) = p_n(x_k))$$

på matriseform

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Kalles en (kvadratisk) Vandermonde matrise

Teorem 2.1 Vandermondematrisen er inverterbar

$\Leftrightarrow$

x_i forskjellige

Derfor: Det finnes et unikt n 'te grads polynom som interpolerer f i $n+1$ forskjellige punkter.

Bevis:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_0 & & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_0^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{rad } i \\ (i) - x_0 \cdot (i-1) \\ \vdots \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

$x_i^k - x_i^{k-1} x_0$
 $= x_i^{k-1} (x_i - x_0)$

utvikler determinanten langs søyle 1:

$$\left| \begin{pmatrix} x_i^{(k-1)} (x_i - x_0) \end{pmatrix} \right| = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \dots (x_n - x_0)$$

kan trekkes ut fra søyle?

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

antar ved induksjon at $or \neq 0$.