

Forelesning 30/10

Seksjon 2.2

Newtonformen for det interpolerende polynom:

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots \\ + c_n(x-x_0) \dots (x-x_{n-1})$$

Interpolasjonsbetingelsene på newtonform:

$$f(x_0) = c_0$$

$$f(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0)$$

$\vdots$

$$f(x_n) = c_0 + c_1(x_n - x_0) + c_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \dots + c_n(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1})$$

på matrise form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Dette er et nedretriangulært system med ikke nuller på diagonalen

Har lært at denne er invertierbar

Derfor: Newtonformen for det interpolerte polynom er unik.

Triangulære systemer er mindre regnekrevende å løse:

Anta vi har funnet $c_0, \dots, c_{k-1}$ fra de første ligningene i

$$\begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Likning k sier da at

$$a_{k0}c_0 + a_{k1}c_1 + \dots + a_{k(k-1)}c_{k-1} + a_{kk}c_k = f(x_k)$$

$$c_k = \frac{1}{a_{kk}} (f(x_k) - a_{k0}c_0 - a_{k1}c_1 - \dots - a_{k(k-1)}c_{k-1}),$$

slik at vi også kan finne c_k !

Dette kalles fremoversubstitusjon: $c_0 \rightarrow c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_3 \rightarrow \dots$

$\nearrow$ k mults.
k subtr.
2k ops

Antall regneoperasjoner som trengs:

$$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \dots + 2n &= 2(1 + 2 + \dots + n) \\ &= 2 \frac{n(n+1)}{2} = n^2 + n \end{aligned}$$

Oppgave 2.1.3: Gausseliminasjon krever $\frac{2}{3}n^3$ operasjoner.

Newtonformen for $n=0$:

$$f(x_0) = c_0 \quad \Rightarrow \quad p(x) = f(x_0)$$

$$n=1: f(x_0) = c_0$$

$$f(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0)$$

$$\rightarrow c_1 = \frac{f(x_1) - c_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$p_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0)$$

$$= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

$$n=2: f(x_0) = c_0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = f(x_0)$$

$$f(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0) \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$c_2 = \frac{f(x_2) - c_0 - c_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \dots \quad (2.12) \text{ ; boka.}$$

Vi skriver ofte $c_k = f[x_0, \dots, x_k]$, siden c_k ikke er avhengig av $x_{k+1}, \dots, x_n$.

Eksempel: Vi interpolerer $f(x) = x^4$; punktene $-1, 0, 1, 2$

Hva blir newtonformen til det interpolerende polynom?

Løsning:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 1 = c_0 \\ f(x_1) &= 0 = c_0 + c_1 \cdot 1 \\ f(x_2) &= 1 = c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2 \\ f(x_3) &= 16 = c_0 + c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot 6 + c_3 \cdot 6 \end{aligned}$$

$x_1 - x_0 = 1$
 $x_2 - x_0 = 2$
 $(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = 2 \cdot 1 = 2$
 $(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) = 6$
 $(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = 6 \cdot 2 \cdot 1 = 12$
 $(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = 6 \cdot 2 \cdot 1 = 12$
 $(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = 6 \cdot 2 \cdot 1 = 12$

$$1 = c_0 \Rightarrow c_0 = 1$$

$$0 = c_0 + c_1 \Rightarrow c_1 = -c_0 = -1$$

$$1 = c_0 + 2c_1 + 2c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{1 - c_0 - 2c_1}{2} = \frac{1 - 1 + 2}{2} = 1$$

$$16 = c_0 + 3c_1 + 6c_2 + 6c_3 \Rightarrow c_3 = \frac{16 - c_0 - 3c_1 - 6c_2}{6} = \frac{16 - 1 + 3 - 6}{6} = 2$$

$$\begin{aligned} \text{Derfor: } p_3(x) &= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + c_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ &= 1 - (x + 1) + (x + 1)x + 2(x + 1)x(x - 1) \end{aligned}$$

sjekk:

$$x = -1 \rightarrow 1 = f(-1)$$

$$x = 0 \rightarrow 1 - 1 = 0 = f(0)$$

$$x = 1 \rightarrow 1 - 2 + 2 = 1 = f(1)$$

$$x = 2 \rightarrow 1 - 3 + 6 + 2 \cdot 6 = 16 = f(2)$$

Oppgave 2.2.6 a)

Finnes det et unikt polynom p_3 , av grad 3, s.o.

$$p_3(x_0) = f(x_0), \quad p_3(x_1) = f(x_1), \quad p_3'(x_1) = f'(x_1), \quad p_3(x_2) = f(x_2).$$

f antas deriverbar.

Løsning: prøv

$$p_3(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)^2$$

$$\text{Vi ser at } p_3'(x) = c_1 + c_2((x-x_0) + (x-x_1)) + c_3((x-x_1)^2 + 2(x-x_1)(x-x_0))$$

Interpolasjonsbetingelsene blir:

$$f(x_0) = c_0$$

$$f(x_1) = c_0 + c_1(x_1 - x_0)$$

$$f'(x_1) = c_1 + c_2(x_1 - x_0) \quad (= p_3'(x_1))$$

$$f(x_2) = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) + c_3(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)^2$$

på matriseform:

$$\begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f'(x_1) \\ f(x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 - x_0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Dette er igjen en nedretriangulær matrise, med $\neq 0$ på diagonal, slik at c_0, c_1, c_2, c_3 er unike $\Rightarrow$ unikt polynom.

Seksjon 2.3

Teorem 2.8

La $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ være interpolasjonspunkter, og la f være $n+1$ ganger kontinuerlig deriverbar, og p_n det unike interpolerende ^{n 'te grads} polynomet

$$\text{Da er } |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

$$\text{for alle } x \in [a, b], \text{ der } M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Problemet med $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ er at $M_{n+1} \approx (n+1)!$, så
 feil $\leq (b-a)^{n+1}$.

I beviset finnes vi en $c \in [a, b]$ slik at

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n).$$

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n).$$