

Numerisk derivasjon, kap. 3 i NA

Vi vil finne en tilnærming til den deriverte til funksjonen f , men kjenner bare til f i enkelte punkter. Hvordan skal vi gjøre det?

Strategi 3.1

Anta f er kjent i punktene $a-2h, a-h, a, a+h, a+2h$ oppløsningen til kjente f -verdier.

1. Plukk en delmængde med $n+1$ punkter av disse hvor a heltallige.

(*) $a+m_0 h, a+m_1 h, \dots, a+m_n h$

2. Finn polynom p_n som interpolerer f i disse punktene

3. Bruk $p_n'(a)$ som tilnærming til $f'(a)$

Dette kalles punktmetoden for numerisk derivasjon, basert på punktene (*).

Kan brukes for høyere deriverte og.

Vi definerer trunkeringsfeilen i denne tilnærmingen som

$$E_k(f; a, h) = f^{(k)}(a) - p_n^{(k)}(a)$$

(feilen vi får ved å derivere p_n i stedet for f).

Seksjon 3.1: Punktmetoden basert på punktene a og $a+h$
 $m_0=0, m_1=1$

polynom som interpolerer f i a og $a+h$ er sekanten gjennom disse:

$$p_1(x) = f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h} (x-a)$$

Tilnærmingen til $f'(a)$ blir $p_1'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$,

Som er det vi kaller Newtonkvotienten

(den deriverte er definert som grenseverdien til denne når $h \rightarrow 0$).

Trunkeringsfeil: $E_1(f; a, h) = f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Vi analyserer denne med 1. ordens Taylorrekke med restledd.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2!}(x-a)^2,$$
$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(c)}{2!}h^2, \quad c \in [a, a+h]$$

flytt over:
og del med h

$$f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = - \frac{f''(c)}{2}h$$

trunkeringsfeil, $E_1(f; a, h)$

Setter vi $M_2 = \max_{x \in [a, a+h]} |f''(x)|$ sier dette

$$|E_1(f; a, h)| \leq \frac{h}{2} M_2 \quad (\text{prop 3.2}).$$

Vi er typisk interessert i feilen for $h = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots$
 $h = 10^{-k}$

Vi vil plote feilen mot k og tar logaritmer:

$$\begin{aligned} \log_{10} |E_1(f; a, h)| &\leq \log_{10} \left(\frac{h}{2} M_2 \right) \\ &= \log_{10} \frac{M_2}{2} + \log h \\ &= \log \frac{M_2}{2} - k \end{aligned}$$

Oppgave 3.1.1 punktmetoden basert på $a-h$ og a :

interpolerende polynom: $p_1(x) = c_0 + c_1(x-a)$

$$f(a) = c_0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = f(a)$$

$$f(a-h) = c_0 - c_1 h \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$$

$$p_1(x) = f(a) + \frac{f(a) - f(a-h)}{h} (x-a)$$

$$p_r'(a) = \frac{f(a) - f(a-h)}{h}, \text{ som verdets skille frem til.}$$

Sek. 3.2 Andre punktmetoder

Punktmetoden basert på $a-h, a, a+h$.