

Oppgave 3.2.5

a) Tilnærming til den deriverte som bruker $f(a-h)$, $f(a)$, $f(a+2h)$

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x - (a-h)) + c_2(x - (a-h))(x - a)$$

$$f(a-h) = c_0$$

$$\Rightarrow c_0 = f(a-h)$$

$$f(a) = c_0 + c_1 h$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{f(a) - c_0}{h} = \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$$

$$f(a+2h) = c_0 + c_1 3h + c_2 6h^2$$

$$\Downarrow$$
$$c_2 = \frac{f(a+2h) - c_0 - c_1 3h}{6h^2}$$

$$= \frac{f(a+2h) - f(a-h) - 3(f(a) - f(a-h))}{6h^2}$$

$$= \frac{f(a+2h) - 3f(a) + 2f(a-h)}{6h^2}$$

$$p_n(x) = f(a-h) + \frac{f(a) - f(a-h)}{h}(x - (a-h)) + \frac{f(a+2h) - 3f(a) + 2f(a-h)}{6h^2} \cdot (x - (a-h))(x - a)$$

$$p_n'(x) = \frac{f(a) - f(a-h)}{h} + \frac{f(a+2h) - 3f(a) + 2f(a-h)}{6h^2} ((x - (a-h)) + x - a)$$

$$p_n'(a) = \frac{f(a) - f(a-h)}{h} + \frac{f(a+2h) - 3f(a) + 2f(a-h)}{6h^2} h$$

$$= \frac{f(a+2h) + 3f(a) - 4f(a-h)}{6h}$$

$$f(a+2h) = f(a) + \dots$$

$$f(a-h) = f(a) + \dots$$

b) Tilnærming som bruker $f(a)$, $f(a+h)$, $f(a+2h)$

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)(x-(a+h))$$

$$\begin{aligned}
 f(a) &= c_0 & \Rightarrow c_0 &= f(a) \\
 f(a+h) &= c_0 + c_1 h & \Rightarrow c_1 &= \frac{f(a+h) - c_0}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
 f(a+2h) &= c_0 + c_1 2h + c_2 \cdot 2h^2 \\
 &\Downarrow \\
 c_2 &= \frac{f(a+2h) - f(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} 2h}{2h^2} \\
 &= \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{2h^2}
 \end{aligned}$$

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x-a) + \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{2h^2}(x-a)(x-(a+h))$$

$$p_n'(x) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{2h^2} \left((x-a) + (x-(a+h)) \right)$$

innsatt $x=a \rightarrow -h$

$$\begin{aligned}
 p_n'(a) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{2h} \\
 &= \frac{-f(a+2h) + 4f(a+h) - 3f(a)}{2h}
 \end{aligned}$$

Kap. 4 Numerisk integrasjon

Repetisjon om integralet:

En partisjon av $[a, b]$ er en samling tall $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

I en uniform partisjon er $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = \frac{b-a}{n}$

Øvre trappesum for en partisjon: $\bar{I}(\pi) = \sum M_i (x_i - x_{i-1})$ ↑ maks. av f på i 'te delintervall.

Nedre trappesum for en partisjon: $\underline{I}(\pi) = \sum m_i (x_i - x_{i-1})$ ↑ min. av f på i 'te delintervall.

Hvis $\lim_{|\pi| \rightarrow 0} \underline{I}(\pi) = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \bar{I}(\pi)$ sier vi at f er integrerbar,

og vi kaller den felles grenseverdien for $\int_a^b f(x) dx$

Kontinuerlige funksjoner er integrerbare, og

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|T| \rightarrow 0} \sum f(t_i) (x_i - x_{i-1})$$

for alle valg av t_i i i 'te delintervall

$= h$ når uniform partisjon.

Metodene våre vil basere seg på konkrete valg for t_i

Midtpunktsmetoden velger t_i som midtpunktet $\frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ på i 'te delintervall.

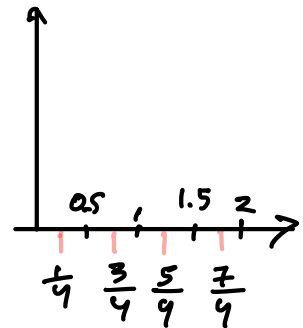
Dette gir $I_{\text{mid}}(h) = \sum f(x_{i-\frac{1}{2}})h$ som tilnærming til $\int_a^b f(x) dx$.

Eksempel: Bruk midtpunktsmetoden med 4 delintervaller for å finne en tilnærming til $\int_0^2 x^2 dx$.

Løsning: Vi har $h = \frac{b-a}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}, x_{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}, x_{\frac{5}{2}} = \frac{5}{4}$$

$$x_{\frac{7}{2}} = \frac{7}{4}$$



$$\begin{aligned} I_{\text{mid}}(h) &= h \sum_{i=1}^4 f(x_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1+9+25+49}{16} = \frac{1}{2} \frac{84}{16} = \frac{21}{8} = 2.625 \end{aligned}$$

$$\text{Eksakt svar: } \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3} \approx 2.6667$$

$$\text{feilen: } |2.6667 - 2.625| \approx 0.0416.$$

Feilanalyse:

Lokal feil: Feilen metoden gjør på ett delintervall.

Global feil: Total feil over alle delintervaller

Lokal feilanalyse: Feilen på ett intervall er

$$E = \int_a^b f(x) dx - \underbrace{f(m)(b-a)}_h, \text{ der } m \text{ er midtpunktet } m = \frac{a+b}{2}$$

Lag en Taylorutvikling av f om m : $c \in [a, b]$.

$$f(x) = f(m) + f'(m)(x-m) + \frac{f''(c)}{2}(x-m)^2$$

integrerer begge sider:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \left(f(m) + f'(m)(x-m) + \frac{f''(c)}{2}(x-m)^2 \right) dx \\ &= f(m)(b-a) + \underbrace{\frac{f'(m)}{2} \left[(x-m)^2 \right]_a^b}_{(b-m)^2 - (a-m)^2 = 0} + \int_a^b \frac{f''(c)}{2}(x-m)^2 dx \\ &= f(m)(b-a) + \frac{1}{2} \int_a^b f''(c)(x-m)^2 dx \end{aligned}$$

$$\underbrace{\int_a^b f(x) dx - f(m)(b-a)}_E = \frac{1}{2} \int_a^b f''(c)(x-m)^2 dx$$

$$|E| = \frac{1}{2} \left| \int_a^b f''(c)(x-m)^2 dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_a^b |f''(c)|(x-m)^2 dx \quad M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_a^b M_2 (x-m)^2 dx$$

$$\frac{M_2}{2} \left[\frac{1}{3} (x-m)^3 \right]_a^b = \frac{M_2}{6} \left((b-m)^3 - (a-m)^3 \right)$$

$$= \frac{M_2}{6} \left(\left(\frac{b-a}{2} \right)^3 + \left(\frac{b-a}{2} \right)^3 \right)$$

$$= \frac{M_2}{6} (b-a)^3 \frac{1}{2^3} 2 = \frac{M_2}{24} (b-a)^3$$

Lemma 4.6: Hvis f er kont., med kont. 1. og 2. ordens deriverte på $[a, b]$, så er feilen i midtpunktsmetoden med ett delintervall

$$\left| \int_a^b f(x) dx - f(m)(b-a) \right| \leq \frac{M_2}{24} (b-a)^3$$

Global feilanalyse: Feilen over alle delintervaller er

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(x_{i-\frac{1}{2}}) h \right|$$

$\frac{b-a}{n}$

$$= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(x_{i-\frac{1}{2}}) h \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^n \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f(x_{i-\frac{1}{2}}) h \right) \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - f(x_{i-\frac{1}{2}}) h \right|$$

lokal feil på ett delintervall

$$\leq \sum_{i=1}^n \frac{M_2}{24} h^3 = \frac{M_2}{24} nh^3 = \frac{M_2}{24} h^2 (b-a)$$

$nh = b-a$, så den $h = \frac{b-a}{n}$

Teorem 4.7 Den globale feilen i midtpunktsmetoden er

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(x_{i-\frac{1}{2}}) h \right| \leq \frac{M_2}{24} h^2 (b-a)$$

For at feilen med midtpunktsmetoden skal bli mindre enn ε ,
 så må vi velge h slik at $\frac{h^2}{24} M_2(b-a) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$

$$h < \sqrt{\frac{24\varepsilon}{M_2(b-a)}}$$

Sek. 4.3 Alternativer til midtpunktsmetoden

Strategi 4.8 Lag en tilnærming til $\int_a^b f(x) dx$ som følger:

1. Del $[a, b]$ i $n \cdot k$ like store delintervaller ($n, k \geq 1$)

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{nk-1} < x_{nk} = b$$

2. For hvert delintervall $J_i = [x_{(i-1)k}, x_{ik}]$,
 bredde $h = \frac{b-a}{n}$

finn polynomet av grad k ($P_{k,i}$) som interpolerer
 f i de $k+1$ punktene $\{x_{(i-1)k}, \dots, x_{ik}\}$

3. Bruk $\int_{J_i} P_{k,i}(x) dx$ som en tilnærming til $\int_{J_i} f(x) dx$,

legg sammen disse og få tilnærminger

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \int_{J_i} P_{k,i}(x) dx$$

Denne strategien kalles også for Newton-Cotes metoden